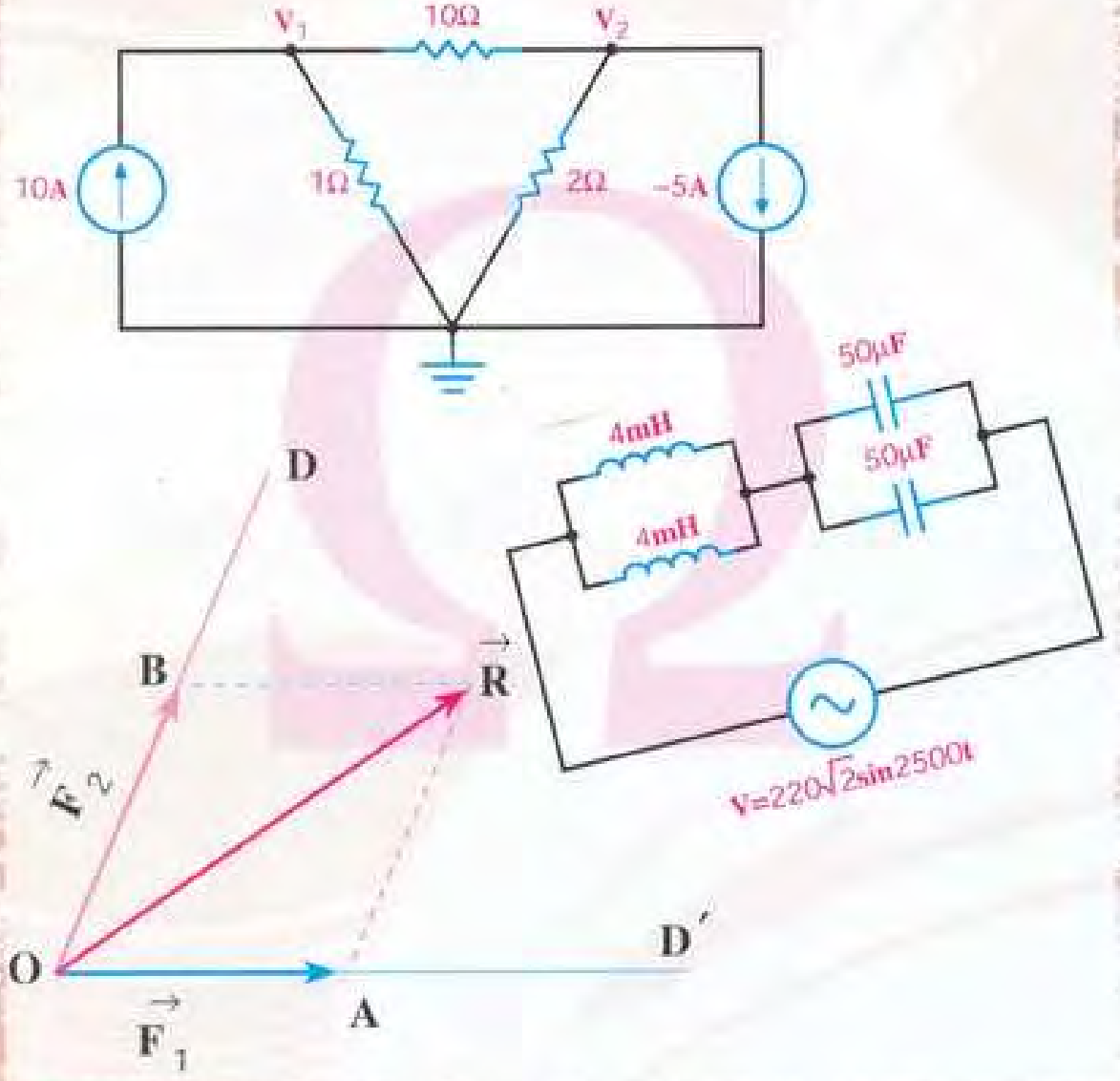
جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش
تهیه و تنظیم حاست

مدارهای الکتریکی

فنی و حرفه‌ای (رشته‌های الکترونیک ـ الکتروتکنیک)



بسم الله الرحمن الرحیم

مدارهای الکتریکی

رشته‌های الکترونیک ـ الکتروتکنیک

زمینه‌ی صنعت

شاخه‌ی آموزش فنی وحرفه‌ای

نظام جدید آموزش متوسطه

شماره‌ی درس۲۰۷۲

۶۲۱ عراقی، علی
/۳۱۹ مدارهای الکتریکی/ مؤلفان : علی عراقی، فریدون علومی. ـ تهران : شرکت چاپ‌ونشر
م ۴۹۴ ع/ کتاب‌های درسی ایران، ۱۳۸۴.
۱۳۸۴ ۱۶۶ص. :مصور. ـ(آموزش فنی و حرفه‌ای ؛ شماره‌ی درس ۲۰۷۲)
متون درسی رشته‌های الکترونیک ـ الکتروتکنیک، زمینه‌ی صنعت.
برنامه‌ریزی و نظارت، بررسی و تصویب محتوا : کمیسیون برنامه‌ریزی و تألیف کتاب‌های درسی رشته‌های الکترونیک ـ الکتروتکنیک دفتر برنامه‌ریزی و تألیف آموزش‌های فنی و حرفه‌ای و کاردانش وزارت آموزش و پرورش.
۱. مدارهای برقی. الف. علومی، فریدون. ب. ایران. وزارت آموزش و پرورش. کمیسیون برنامه‌ریزی و تألیف رشته‌های الکترونیک ـ الکتروتکنیک. د. عنوان. هـ. فروست.

۱۳۸۴

همکاران محترم و دانش‌آموزان عزیز:

پیشنهادات و نظرات خود را درباره‌ی محتوای این کتاب به نشانی تهران ـ صندوق پستی شماره‌ی ۴۸۷۴/۱۵ دفتر برنامه‌ریزی و تألیف آموزش‌های فنی و حرفه‌ای و کاردانش، ارسال فرمایند.

پست الکترونیکی info@tvoccd.sch.ir

آدرس الکترونیکی www.tvoccd.sch.ir

این کتاب با توجه به برنامه‌ی سالی ـ واحدی در آذرماه سال ۱۳۷۹ توسط کمیسیون تخصصی برنامه‌ریزی و تألیف رشته‌های الکترونیک ـ الکترونکنیک بازسازی و تجدیدنظر گردید.

وزارت آموزش و پرورش

سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

برنامه‌ریزی محتوا و نظارت بر تألیف: دفتر برنامه‌ریزی و تألیف آموزش‌های فنی و حرفه‌ای و کاردانش

نام کتاب: مدارهای الکتریکی ـ ۴۸۷/۸

مؤلفان: مهندس علی عراقی، مهندس فریدون علومی

آماده‌سازی و نظارت بر چاپ: اداره‌ی کل چاپ و توزیع کتاب‌های درسی

رسام: فاطمه رئیسیان‌فیروزآباد، سروش ذوالریاستین

صفحه‌آرا: شهرزاد قنبری

طراح جلد: مریم کیوان

ناشر: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران: تهران ـ کیلومتر ۱۷ جاده‌ی مخصوص کرج ـ خیابان ۶۱ (داروپخش)

تلفن: ۲ ـ ۶۰۲۶۲۲۱، دورنگار: ۶۰۲۶۲۴۰، صندوق پستی: ۱۳۲۲۵/۶۸۴

چاپخانه: اقبال

سال انتشار: ۱۳۸۴

حق چاپ محفوظ است.

شابک ۹۶۴-۰۵-۰۸۹۰-X ISBN 964-05-0890-X

شما عزیزان کوشش کنید که از این وابستگی بیرون آیید و احتیاجات کشور خودتان را برآورده سازید، از نیروی انسانی ایمانی خودتان غافل نباشید و از اتکای به اجانب بپرهیزید.

امام خمینی «قدّس سرّه الشّریف»

فهرست

مقدمه ۱

فصل اول: مدارهای الکتریکی جریان مستقیم ۲
۱ـ۱ـ مقدمه ۲
۱ـ۲ـ عناصر مدار ۳
۱ـ۳ـ تحلیل مدار به روش اصل جمع آثار ۴
۱ـ۴ـ تحلیل مدار به‌روش پتانسیل گره ۷
۱ـ۵ـ تحلیل مدار به روش جریان حلقه ۱۱
۱ـ۶ـ تبدیل منابع ولتاژ و جریان به یک‌دیگر ۱۵
۱ـ۷ـ تبدیلات توتن و نورتن مدارهای الکتریکی ۱۸
۱ـ۸ـ انتقال ماکزیمم توان به بار ۲۳
۱ـ۹ـ مدارهای شامل سلف و خازن ۲۵
۱ـ۱۰ـ تمرین‌ها ۲۸
۱ـ۱۱ـ تمرین‌های مکمل ۳۱

فصل دوم: بردار ۳۶
۲ـ۱ـ مقدمه ۳۶

۲ـ۲ـ بردار چیست؟ ۳۷
۳ـ۲ـ هم سنگ(هم‌ارز) یک بردار ۳۸
۴ـ۲ـ برایند دو یا چند بردار ۳۹
۵ـ۲ـ حاصل جمع بردارها ۳۹
۶ـ۲ـ تفاضل دو بردار ۴۱
۷ـ۲ـ تجزیه‌ی یک بردار به دو راستای معین ۴۲
۸ـ۲ـ ضرب بردارها ۴۴
۹ـ۲ـ نمایش برداری امواج متناوب سینوسی ۴۶
۱۰ـ۲ـ توان الکتریکی ۴۸
۱۱ـ۲ـ تمرین‌ها ۵۴

فصل سوم: مدارهای R-L جریان متناوب ۵۶
۱ـ۳ـ مقدمه ۵۶
۲ـ۳ـ مدار معادل الکتریکی یک سلف حقیقی ۵۷
۳ـ۳ـ محاسبه‌ی امپدانس مدار R-L سری ۵۸
۴ـ۳ـ اختلاف فاز و ضریب توان مدار R-L سری ۶۰
۵ـ۳ـ توان‌های مدار R-L سری ۶۱
۶ـ۳ـ ضریب کیفیت مدار R-L سری (qulalityfactor) ۶۲
۷ـ۳ـ مدار R-L موازی ۶۴
۸ـ۳ـ اثر فرکانس شبکه بر مدارهای R-L ۶۹
۹ـ۳ـ تمرین‌ها ۷۱

فصل چهارم: مدارهای R-C جریان متناوب ۷۴
۱ـ۴ـ مقدمه ۷۴
۲ـ۴ـ مدار R-C سری ۷۵
۳ـ۴ـ مدار R-C موازی ۸۱
۴ـ۴ـ تأثیر فرکانس بر مدارهای R-C ۸۵
۵ـ۴ـ تمرین‌ها ۸۷

فصل پنجم: مدارهای L-C جریان متناوب ۹۱
۱ـ۵ـ مقدمه ۹۱
۲ـ۵ ـ مدار L-C سری ۹۲
۳ـ۵ ـ مدار L-C موازی ۹۸
۴ـ۵ ـ تمرین‌ها ۱۰۱

فصل ششم: مدارهای R-L -C جریان متناوب ۱۰۵
۱ـ۶ ـ مقدمه ۱۰۵
۲ـ۶ ـ مدارهای R-L-C سری ۱۰۶
۳ـ۶ ـ مدارهای R-L-C موازی ۱۱۲
۴ـ۶ ـ مدارهای R-L-C مختلط (سری، موازی) ۱۱۷
۵ـ۶ـ رزنانس در مدارهای R-L-C سری ۱۲۲
۶ـ۶ـ رزنانس در مدارهای R-L-C موازی ۱۲۷
۷ـ۶ ـ تمرین‌ها ۱۳۱

فصل هفتم: جریان‌های سه‌فازه ۱۳۶
۱ـ۷ـ مقدمه ۱۳۶
۲ـ۷ـ تولید جریان متناوب سه‌فاز ۱۳۸
۳ـ۷ـ اتصال ستاره ۱۴۲
۴ـ۷ـ اتصال مثلث ۱۵۲
۵ـ۷ـ اثر قطع یک‌فاز از خطوط انتقال بر مصرف‌کننده‌ها ۱۵۸
۶ـ۷ـ اثر تعویض دوفاز بر کمیت‌های الکتریکی مصرف‌کننده‌ها ۱۶۰
۷ـ۷ـ اثر قطع سیم نول در بار نامتعادل سه فاز اتصال ستاره ۱۶۰
۸ـ۷ ـ تمرین‌ها ۱۶۱

منابع و مآخذ ۱۶۶

مقدمه

محاسبه‌ی تجهیزات تولید، انتقال، توزیع و پخش انرژی الکتریکی و مدارهای تجهیزات الکترونیکی مستلزم آشنایی با روش‌های تحلیل مدارهای الکتریکی است. برای آشنایی دانش‌آموزان و گسترش توانایی و افزایش مهارت آن‌ها در محاسبه‌های الکتریکی، لازم است مدارهای الکتریکی در جریان متناوب و مستقیم و رفتار عناصر سلفی و خازنی و اهمی و ترکیب این عناصر مورد بررسی قرار گیرد. بدین‌منظور، محاسبه‌ی ساده‌ی مدارهای الکتریکی در حالت‌های ماندگار به‌عنوان مجموعه‌ی تحلیل مدارهای جریان الکتریکی ارایه می‌شود. در این مجموعه، علاوه بر مدارهای جریان مستقیم و جریان متناوب یک‌فاز، مدارهای سه‌فاز و محاسبه‌های آن‌ها نیز بررسی شده است.

سرفصل‌های این درس در کمیسیون تخصصی رشته‌های الکروتکنیک و الکترونیک در روش «اجرایی سالی ـ واحدی» به تصویب رسیده است و برای ارایه‌ی مطلوب آن، هدف‌های رفتاری مورد انتظار از دانش‌آموز در ابتدای هر فصل مطرح شده است. بدیهی است ارزش‌یابی این درس باید با هدف‌های رفتاری آن مطابقت داشته باشد. از آن‌جا که این درس نظری و محاسبه‌ای است، پیش‌تر سؤال‌های ارزش‌یابی باید به محاسبه‌های مربوط به مدار اختصاص یابد. بهتر است که دانش‌آموزان در طول ترم به‌طور مرتب مورد ارزش‌یابی قرار گیرند. مدرس این درس می‌تواند مطالب ارایه شده را همراه با انجام دادن آزمایش به دانش‌آموزان نشان دهد تا آن‌ها از طریق مشاهده و اندازه‌گیری، مطالب تحلیل شده را لمس کنند و درک بهتری از مطالب داشته باشند. از مدرسان محترم و عزیزانی که این کتاب را مطالعه می‌کنند، می‌خواهیم که نظریات و پیشنهادهای اصلاحی خود را از طریق دفتر برنامه‌ریزی و تألیف آموزش‌های فنی و حرفه‌ای و کاردانش وزارت آموزش و پرورش در اختیار ما قرار دهند.

مؤلفان

هدف کلی درس

تحلیل مدارهای جریان مستقیم و مدارهای R - L - C در جریان متناوب یک‌فاز و مدارهای سه فاز ساده.

فصل اول

مدارهای الکتریکی جریان مستقیم

هدف‌های رفتاری: در پایان تدریس این فصل از دانش‌آموز انتظار می‌رود:

۱ــ مفهوم تحلیل مدارهای الکتریکی را بیان کند.

۲ــ عناصر فعال و غیرفعال مدار را تعریف کند و مشخصات آن‌ها را شرح دهد.

۳ــ مدارهای جریان مستقیم را به روش اصل جمع آثار تحلیل کند.

۴ــ مدارهای جریان مستقیم را به روش پتانسیل گره حل کند.

۵ــ مدارهای جریان مستقیم را به روش جریان حلقه حل کند.

۶ــ منابع ولتاژ و جریان را به یک‌دیگر تبدیل کند.

۷ــ معادل تونن و نورتن مدارهای جریان مستقیم را به‌دست آورد.

۸ــ شرایط انتقال ماکزیمم توان را به بار شرح دهد و ماکزیمم توان انتقالی را محاسبه کند.

۱ــ۱ــ مقدمه

در درس مبانی برق با مدارهای الکتریکی آشنا شدید. عناصر مدار را که شامل منابع ولتاژ، مقاومت‌های اهمی، سلف و خازن است شناختید و مشخصات آن‌ها را در جریان مستقیم و متناوب بررسی کردید. مدارهای ساده را که از یک حلقه درست شده بودند یا دارای یک منبع تغذیه بودند، مورد تجزیه و تحلیل قرار دادید و در این مدارها جریان و ولتاژ و توان را در مصرف‌کننده‌ها و منابع محاسبه کردید. هم‌چنین ولتاژ دوسر یک مقاومت را در مدار سری از طریق تقسیم ولتاژ و جریان یک مصرف‌کننده را در مدارهای موازی به روش تقسیم جریان به‌دست آوردید.

مقاومت، القاگری و ظرفیت معادل را در مدارهای سری، موازی و مختلط محاسبه کردید و بالاخره، قوانین اهم، ولتاژهای کیرشهف در مدارهای سری و جریان‌های کیرشهف در انشعاب‌ها را برای حل مسایل به‌کار بردید. اما با مدارهایی که شامل چند حلقه باشند و در هر حلقه منابع تغذیه

وجود داشته باشد، تاکنون برخورد نداشته‌اید. ما در این فصل مدارهایی را مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌دهیم که دارای منابع و حلقه‌های متعدد باشند. وقتی می‌گوییم مدار را مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌دهیم، یعنی جریان‌ها و ولتاژها و نیز توان‌های هر مصرف‌کننده را محاسبه و تعیین می‌کنیم که مثلاً کدام منبع، انرژی بیش‌تری به مصرف‌کننده‌ها می‌دهد یا حتی گاهی نتیجه می‌گیریم که فلان منبع نه تنها به مدار انرژی نمی‌دهد بلکه خود مصرف‌کننده است. برای این که بتوانیم این مدارها را مورد تجزیه و تحلیل قرار دهیم، از روش‌های مختلفی می‌توانیم استفاده کنیم. برخی از این روش‌ها که در این فصل به کمک آن‌ها به تجزیه و تحلیل مدارها می‌پردازیم، عبارت‌اند از : اصل جمع آثار، پتانسیل گره، جریان‌های حلقه و نیز معادل‌سازی تونن و نورتن مدار.

۲ــ۱ــ عناصر مدار

با اغلب عناصر مدارهای الکتریکی قبلاً آشنا شده‌اید. در این‌جا بیش‌تر مطالب جنبه‌ی یادآوری دارد ولی به هرحال با نکات جدیدی نیز برخورد می‌کنید. به‌طور کلی عناصر مدار را می‌توان به دو گروه عناصر فعال و عناصر غیرفعال تقسیم کرد.

عناصر غیرفعال عناصری هستند که انرژی الکتریکی را مصرف (به عبارت دیگر تبدیل) می‌کنند یا آن را در خود ذخیره می‌سازند. این عناصر عبارت‌اند از : مقاومت‌های اهمی، سلف‌ها و خازن‌ها. مقاومت اهمی عنصری است که جریان آن با ولتاژ دوسر آن تناسب دارد.

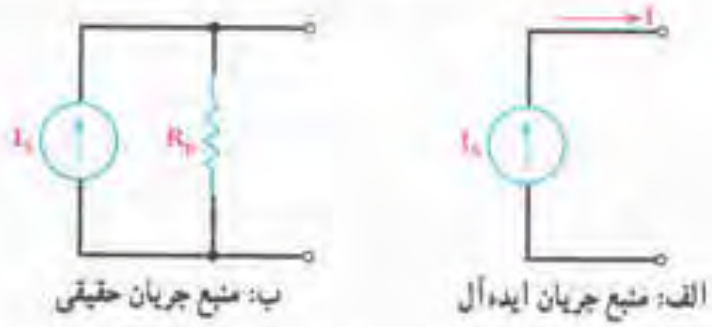
سلف عنصری است که ولتاژ دو سر آن با تغییرات جریان در آن متناسب است و خازن نیز عنصری است که جریان آن با تغییرات ولتاژ دوسرش نسبت به زمان تناسب دارد. البته با توجه به این‌که سلف در جریان مستقیم اتصال کوتاه و خازن در جریان مستقیم به صورت یک مدار باز عمل می‌کند، مدارهایی که در این فصل مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌گیرند بیش‌تر دارای مقاومت‌های اهمی هستند.

عناصر فعال به عناصری گفته می‌شود که انرژی مدار را تأمین می‌کنند. این عناصر عبارت‌اند از : منابع ولتاژ و منابع جریان. هریک از این دو به دو گروه ایده‌آل و حقیقی تقسیم می‌شوند. منبع ولتاژ ایده‌آل منبعی است که در بارهای مختلف ولتاژ ثابتی به مدار می‌دهد اما منبع ولتاژ حقیقی منبعی است که با افزایش بار (کاهش مقاومت مدار)، ولتاژ خروجی آن کاهش می‌یابد. منبع ولتاژ حقیقی را می‌توان منبع ولتاژ ایده‌آلی دانست که یک مقاومت اهمی کوچک با آن سری شده است. منابع تغذیه در صنعت منابع ولتاژ حقیقی هستند و منابع ایده‌آل وجود خارجی ندارند ولی با تقریب می‌توان منابع ولتاژ با انرژی بسیار بزرگ را ایده‌آل فرض کرد (شکل ۱ــ۱).

الف: منبع ولتاژ ایده‌آل ب: منبع ولتاژ واقعی

شکل ۱ــ۱

منابع جریان ایده‌آل منابعی هستند که در بارهای مختلف جریان ثابتی به مدار می‌دهند. به عبارت دیگر، اگر مقاومت بار تغییر کند ولتاژ آن تغییر می‌کند ولی جریان آن ثابت می‌ماند. منابع جریان بیش‌تر در مدارهای الکترونیکی دیده می‌شوند و به صورت ایده‌آل وجود ندارند. منابع جریان واقعی، منابع جریان ایده‌آلی هستند که با یک مقاومت بزرگ اهمی به صورت موازی قرار گرفته‌اند. در نتیجه، در صورت تغییر بار با توجه به ثابت بودن جریان منبع جریان در مصرف‌کننده، قدری تغییر می‌کند (شکل ۲ــ۱).



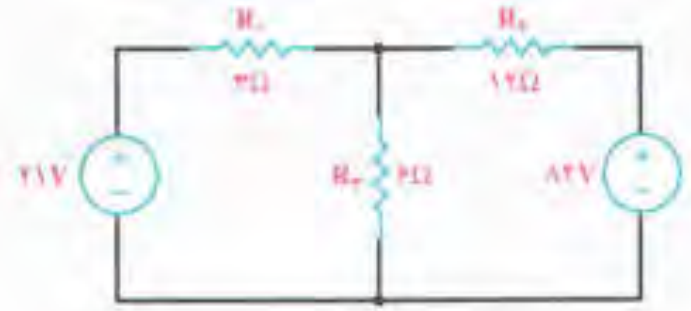
الف: منبع جریان ایده‌آل ب: منبع جریان حقیقی

شکل۲ــ۱

۳ــ۱ــ تحلیل مدار به روش اصل جمع آثار

در مدارهای الکتریکی که چند منبع تغذیه دارند، هریک از منابع در مدار جریانی ایجاد می‌کند و جریان هر عنصر در مدار از جمع جریان‌هایی که هر منبع در آن عنصر ایجاد می‌کند به‌دست می‌آید. به عبارت دیگر، جریان عناصر مدار از مجموع آثار تک‌تک منابع در مدار حاصل می‌شود. جمع آثار در مورد ولتاژ دوسر هر عضو نیز صادق است ولی در مورد کمیت‌هایی که با مجذور جریان یا ولتاژ متناسب هستند صدق نمی‌کند. مثلاً توان در یک مقاومت اهمی را نمی‌توان از مجموع توان‌هایی به‌دست آورد که هر منبع به تنهایی می‌تواند در آن عنصر ایجاد کند.

مثال ۱ــ ۱: در مدار شکل ۳ــ۱ جریان را در مقاومت‌های R_1 و R_2 و R_3 و توان و ولتاژ مقاومت ۶ اهم را محاسبه کنید.



شکل ۳ـ۱

راه حل:

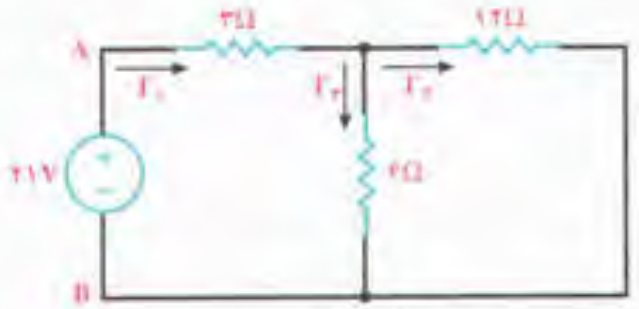
الف : ابتدا به جز یک منبع (مثلاً ۲۱ V) بقیه‌ی منابع را از مدار حذف می‌کنیم. تذکر این نکته لازم است که وقتی منبع ولتاژ را از مدار حذف می‌کنیم، دوسر آن را اتصال کوتاه می‌کنیم در صورتی که بخواهیم منبع جریانی را از مدار حذف کنیم، باید آن را باز کرده و از مدار جدا سازیم. حال برای هر عنصر جریانی را درنظر می‌گیریم و آن‌ها را مطابق روش‌هایی که قبلاً آموخته‌ایم، حساب می‌کنیم (شکل ۴ـ۱).

$$R_{AB}=\frac{۱۲\times۶}{۱۲+۶}+۳=۷\Omega$$

$$I_۱'=\frac{۲۱}{۷}=۳A$$

$$I_۲'=I_۱'\frac{۶}{۱۲+۶}=۳\times\frac{۱}{۳}=۱[A]$$

$$I_۳'=۳\times\frac{۱۲}{۱۲+۶}=۲[A]$$



شکل ۴ـ۱

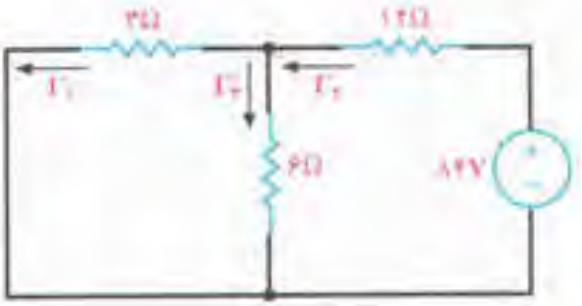
ب : این بار منبع دوم را حذف می‌کنیم و مجدداً جریان عناصر مدار را محاسبه می‌نماییم (شکل ۵ـ۱).

$$R_{CD}=\frac{۳\times۶}{۳+۶}+۱۲=۱۴[\Omega]$$

$$I_۴''=\frac{۸۴}{۱۴}=۶A$$

$$I_۳''=۶\frac{۳}{۳+۶}=۲A$$

$$I_۱''=۶\frac{۶}{۳+۶}=۴A$$



شکل ۵ـ۱

اگر جریان‌های هر عنصر را در دو حالت محاسبه شده با توجه به جهت آن‌ها با یک‌دیگر جمع کنیم، جریان هر عنصر برای زمانی که هر دو منبع در مدار هستند به‌دست می‌آید.

$$I_1 = I_1'' - I_1' = 4 - 3 = 1A$$

$$I_2 = I_2'' - I_2' = 6 - 1 = 5A$$

$$I_3 = I_3' + I_3'' = 2 + 2 = 4A$$

پ : برای محاسبه‌ی ولتاژ مقاومت ۶ اهم، می‌توان به دو صورت زیر عمل کرد.

۱) $V_{6\Omega} = I_3 \times 6 = 4 \times 6 = 24[V]$

۲) $V_{6\Omega} = I_3' \times 6 + I_3'' \times 6 = 2 \times 6 + 2 \times 6 = 24[V]$

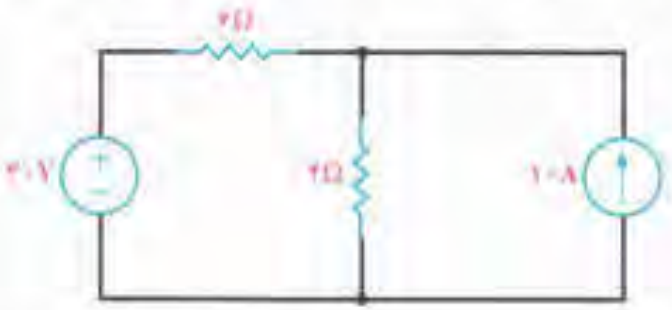
ث : توان در مقاومت ۶ اهم از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید.

$$P = 6 \times I_3^2 = 6 \times 4^2 = 96W$$

توجه کنید که توان این مقاومت را نمی‌توان از رابطه‌ی زیر به‌دست آورد ؛ زیرا حاصل ۹۶ وات نمی‌شود :

$$6 \times I_3'^2 + 6 \times I_3''^2 = 6 \times 2^2 + 6 \times 2^2 = 48 \neq 96$$

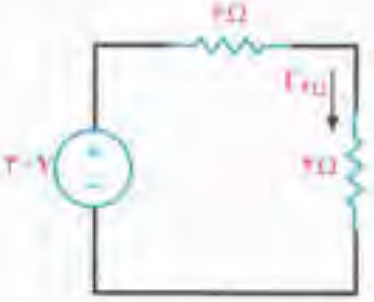
مثال ۲ــ۱: توان مصرفی در مقاومت ۴ اهم را در شکل ۶ــ۱ به روش اصل جمع آثار حساب کنید.



شکل ۶ــ۱

راه حل:

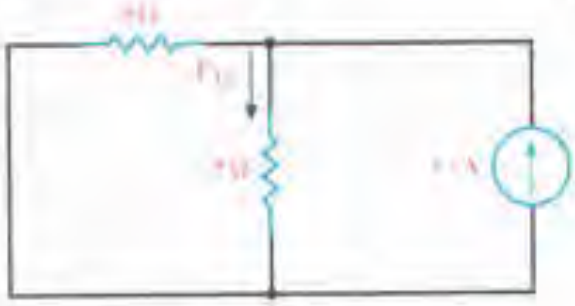
الف : منبع جریان را حذف و جریان مقاومت ۴Ω را محاسبه می‌کنیم (شکل ۷ــ۱).



$$\Rightarrow I_{4\Omega}' = \frac{30}{6+4} = 3A$$

شکل ۷ــ۱

ب : منبع ولتاژ را حذف می‌کنیم و مجدداً جریان مقاومت ۴Ω را به‌دست می‌آوریم (شکل ۸ــ۱).



$$\Rightarrow I''_{۴\Omega} = ۱۰\frac{۶}{۴+۶} = ۶A$$

شکل ۸ ــ ۱

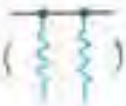
پ : اکنون با جمع آثار، جریان مقاومت ۴Ω را در مدار اصلی به‌دست می‌آوریم و سپس توان آن را حساب می‌کنیم.

$$I_{۴\Omega} = I'_{۴\Omega} + I''_{۴\Omega} = ۳+۶ = ۹A$$

$$P_{۴\Omega} = ۴\times ۹^{۲} = ۳۲۴W$$

۴ــ۱ــ تحلیل مدار به روش پتانسیل گره

برای حل مدار به روش پتانسیل گره از قانون جریان‌های کیرشهف استفاده می‌شود. بدین‌منظور، مراحل زیر را طی می‌کنیم.

الف : مدار را تاحد ممکن ساده می‌کنیم ؛ مثلاً مقاومت‌های موازی یا سری را به‌صورت معادل آن‌ها قرار می‌دهیم یا گره‌های گسترده () را یک‌جا رسم ( ) می‌کنیم.

ب : یکی از نقاط گره را ــ که بهتر است پرانشعاب‌ترین آن‌ها باشد ــ به‌عنوان گره مبنا انتخاب می‌کنیم. فرض بر این است که پتانسیل گره مبنا صفر است.

پ : به بقیه‌ی گره‌ها یک پتانسیل نسبت می‌دهیم ؛ مانند $V_۱$ ، $V_۲$ ، ... ، V_n .

ت : برای هر گره، معادله‌ی جریان‌های کیرشهف (K.C.L.) را می‌نویسیم. برای نوشتن معادله در هر گره به جز منابع جریان ــ که جهت جریان مشخصی دارند ــ جریان بقیه‌ی شاخه‌ها را خروجی درنظر می‌گیریم و با علامت مثبت منظور می‌کنیم. علامت جریان‌های ورودی به گره منفی خواهد بود.

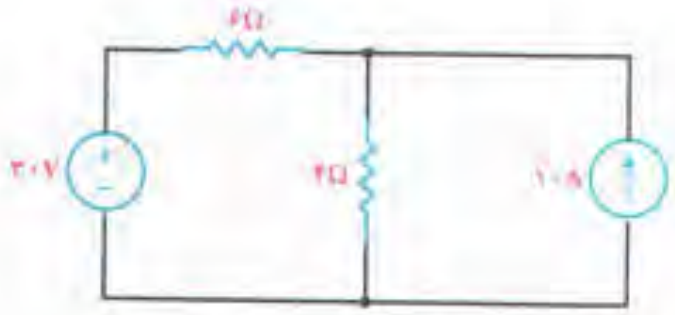
ث : برای مداری با n گره، $n-۱$ معادله نوشته می‌شود که شامل معادله‌ی گره‌ها به‌جز گره مبناست. تعداد معادله‌ها با تعداد مجهولات ــ که پتانسیل‌های گره‌ها هستند ــ برابر است.

ج : با حل دستگاه معادلات چندمجهولی، پتانسیل گره‌ها را به‌دست می‌آوریم.

چ : با معلوم بودن پتانسیل گره‌ها، جریان هر شاخه به راحتی به کمک قانون اهم محاسبه

می‌شود.

مثال ۳ــ۱: توان مصرفی مقاومت ۴ اهم را در شکل ۹ــ۱ به روش پتانسیل گره حساب کنید.

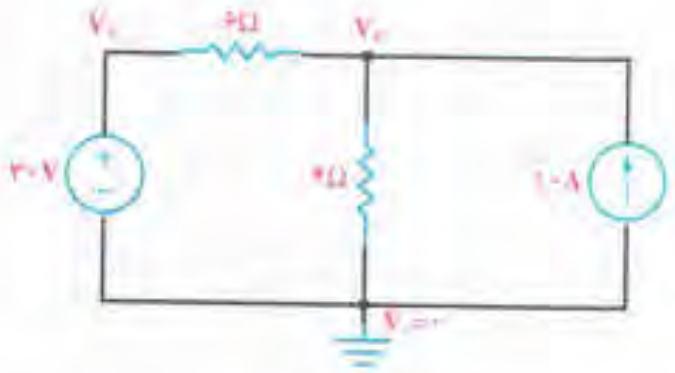


شکل ۹ــ۱

راه حل:

الف: این مدار شکل ساده‌ای دارد و ساده‌تر نمی‌شود.

ب: گره پایین را مبنا اختیار می‌کنیم و بقیه‌ی گره‌ها ولتاژ نسبت می‌دهیم (شکل ۱ــ۱۰).



شکل ۱۰ــ۱

ب: اکنون معادله‌ی جریان‌ها را در گره می‌نویسیم. در این مثال، پتانسیل گره ۱ معلوم است: زیرا از آن‌جا که یک سر منبع ولتاژ به گره مبنا وصل است، پتانسیل سر دیگر آن بسته به پلاریته‌ی منبع به اندازه‌ی اختلاف پتانسیل دوسر آن بیش‌تر یا کم‌تر از پتانسیل مبنا خواهد بود. در این‌جا گره ۱ به‌پلاریته‌ی مثبت منبع وصل است. پس پتانسیل آن برابر ۳۰ ولت می‌شود. در نتیجه، معادله‌ی جریان‌ها را فقط برای گره ۲ می‌نویسیم.

$$+\frac{V_2-V_1}{6}+\frac{V_2-V_0}{4}-10=0$$

با جاگذاری مقادیر V_1 و V_0 خواهیم داشت:

$$\frac{V_2-30}{6}+\frac{V_2}{4}=10$$

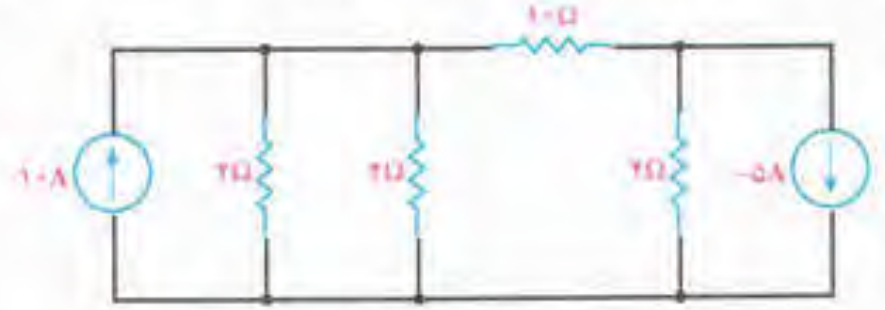
معادله‌ی بالا را حل می‌کنیم و ولتاژ V_2 را به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{2(V_2-30)+3V_2}{12}=10\rightarrow 5V_2-60=120$$

$$5V_2=180\rightarrow V_2=\frac{180}{5}=36V$$

$$P_{4\Omega}=\frac{V_2^2}{4}=\frac{36^2}{4}=324W$$

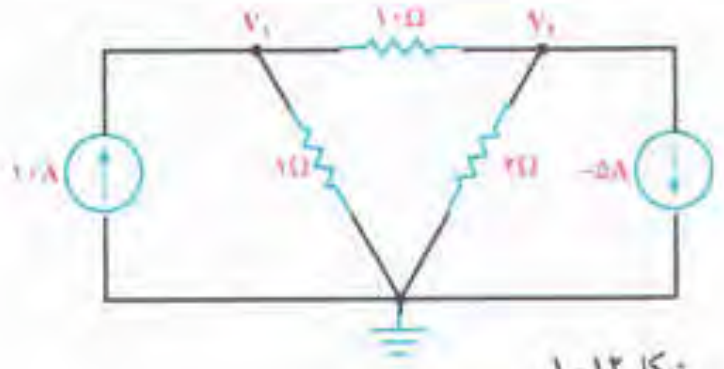
مثال ۴ــ۱: در مدار شکل ۱۱ــ۱ جریان را در مصرف‌کننده ۱۰ اهم حساب کنید.



شکل ۱۱ــ۱

راه حل:

الف: ابتدا مدار را به‌صورت شکل ۱۲ــ۱ ساده کرده و گره‌ها را نام‌گذاری می‌کنیم.



شکل ۱۲ــ۱

ب: در این‌جا سه گره داریم. پس دو معادله برای گره‌های ۱ و ۲ می‌نویسیم.

$$\text{در گره ۱} \rightarrow -۱۰+\frac{V_۱}{۱}+\frac{V_۱-V_۲}{۱۰}=۰$$

$$\text{در گره ۲} \rightarrow +\frac{V_۲-V_۱}{۱۰}+\frac{V_۲}{۲}+(-۵)=۰$$

ب: معادله‌ها را مرتب کرده حل می‌کنیم تا $V_۱$ و $V_۲$ به‌دست آید.

$$\begin{cases} ۱۱V_۱-V_۲=۱۰۰ \\ -V_۱+۶V_۲=۵۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_۱=۱۰[V] \\ V_۲=۱۰[V] \end{cases}$$

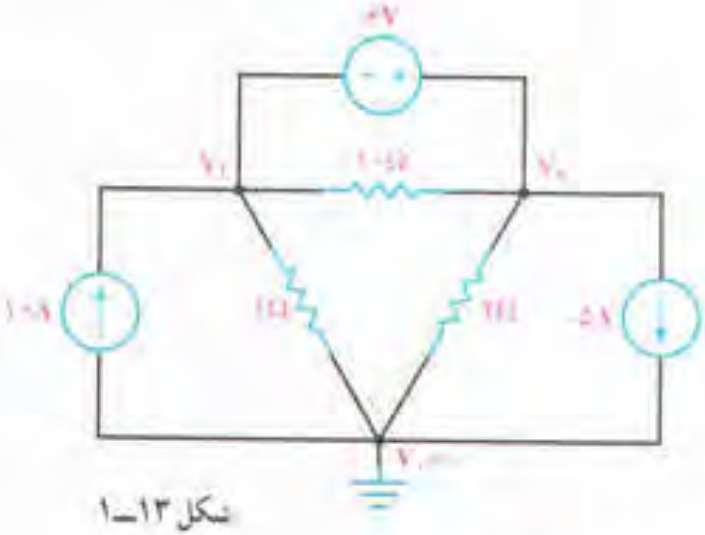
ت: اکنون جریان مقاومت ۱۰ اهم به‌صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$I_{۱۰\Omega}=\frac{V_۱-V_۲}{۱۰}=\frac{۱۰-۱۰}{۱۰}=۰[A]$$

پس در این مدار از مقاومت ۱۰Ω جریانی عبور نمی‌کند. البته در رابطه‌ی بالا می‌شد $\frac{V_۲-V_۱}{۱۰}$ هم نوشت که در این صورت جهت جریان به‌دست آمده از سمت گره ۲ به سمت گره ۱ تعیین می‌شد.

به‌هرحال، در این مثال خاص که مقدار جریان صفر است، هیچ مسئله‌ای نیز در مورد جهت جریان وجود ندارد.

مثال ۵ــ۱: در مدار شکل ۱۳ــ۱ توان مصرفی مقاومت ۱Ω را به‌دست آورید.



شکل ۱۳ــ۱

راه حل:

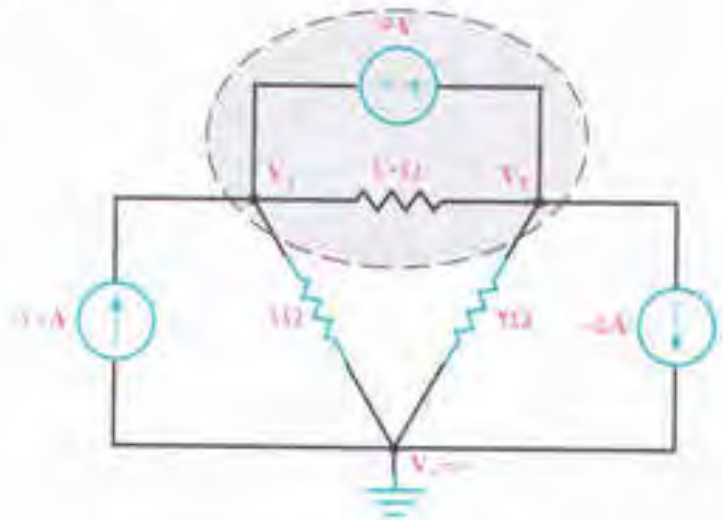
الف: مدار بالا به صورت ساده و مرتب داده شده است اما مشکلی در این مدار وجود دارد و آن این که چون نمی‌توان جریان منبع ولتاژ را محاسبه یا تعیین کرد، پس نمی‌توان معادله‌ی جریان‌ها را در گره‌ها نوشت.

ب: برای حل کردن چنین مدارهایی، دو گره واقع در دوطرف منبع ولتاژ را یک گره بزرگ می‌بینیم (شکل ۱ــ۱۴) و معادله‌ی جریان‌ها را برای گره بزرگ می‌نویسیم. در این حالت، عناصری که بین دو گره واقع شده‌اند، در معادله ظاهر نمی‌شوند ولی تعداد معادلات یکی کم می‌شود. در این‌جا، به‌راحتی می‌توان با توجه به معلوم بودن اختلاف پتانسیل بین دو گره اولیه، یک معادله‌ی جدید نوشت و به یک دستگاه معادلات رسید که در آن تعداد معادله‌ها با تعداد مجهولات برابر است و می‌توان آن را حل کرد.

داریم:

$$\text{در گره بزرگ} \rightarrow -۱۰+\frac{V_۱}{۱}+\frac{V_۲}{۲}+(-۵)=۰$$

$$\text{از طرفی} \rightarrow V_۲-V_۱=۶$$



شکل ۱۴ــ۱

پ : معادله‌ها را مرتب می‌کنیم و V_1 را به‌دست می‌آوریم.

$$\left.\begin{array}{l} 2V_1 + V_2 = 30 \\ -V_1 + V_2 = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow 3V_1 = 24 \rightarrow V_1 = 8[V]$$

ت : توان مصرفی در مقاومت 1Ω برابر است با :

$$P_{1\Omega} = \frac{V_1^2}{1} = 64[W]$$

۵ــ۱ــ تحلیل مدار به روش جریان حلقه

برای حل کردن مدار به روش جریان حلقه، از قانون ولتاژهای کیرشهف استفاده می‌شود. بدین‌منظور، مراحل زیر را طی می‌کنیم.

الف : ابتدا مدار را تا حد ممکن ساده می‌کنیم.

ب : برای هر حلقه، یک جریان در جهت دلخواه منظور می‌کنیم. برای سادگی کار و کم‌تر شدن اشتباهات، بهتر است جریان همه‌ی حلقه‌ها را در یک جهت فرض کنیم. ما در این قسمت، جریان حلقه‌ها را در جهت حرکت عقربه‌های ساعت فرض می‌کنیم.

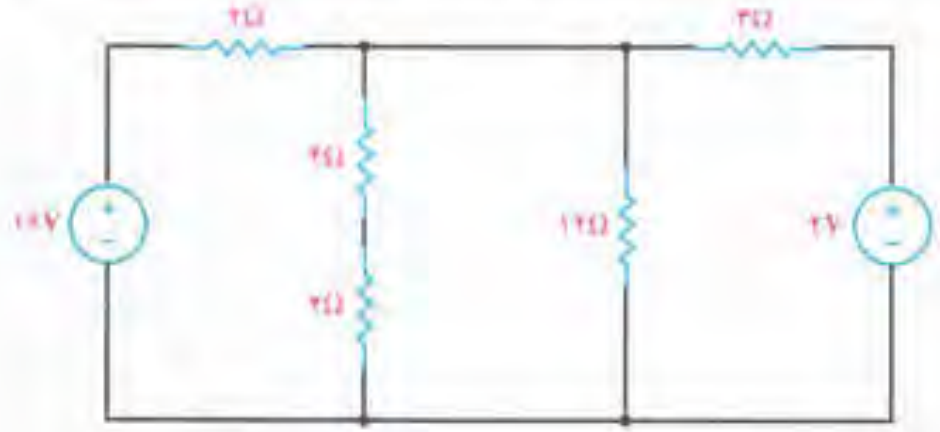
پ : با حرکت در جهت جریان انتخابی در هر حلقه، با استفاده از قانون ولتاژهای کیرشهف (K.V.L) معادله‌ی ولتاژها را برای هر حلقه می‌نویسیم.

ت : در هنگام حرکت در یک حلقه اگر به عنصری رسیدیم که با حلقه‌ی دیگری مشترک است، جریان آن عنصر از جمع جبری جریان دو حلقه‌ی طرفین آن به دست می‌آید. با توجه به این که ما جهت جریان همه‌ی حلقه‌ها را در جهت حرکت عقربه‌های ساعت گرفته‌ایم، پس در این عناصر جریان مربوط به حلقه‌ی دوم، خلاف جهت جریان در حلقه‌ی اول است و از جریان حلقه‌ی اول کم می‌شود.

ث : با توجه به این‌که در مصرف‌کننده‌ها جریان به پلاریته‌ی مثبت وارد می‌شود و ما در هنگام نوشتن معادلات در جهت جریان حرکت می‌کنیم، پس ولتاژ همه‌ی مصرف کننده‌ها مثبت است. طبیعی است که ولتاژ منابع تغذیه با توجه به پلاریته‌ی آن‌ها در معادلات نوشته می‌شود ؛ یعنی، اگر در حرکت به مثبت منبع برسیم، آن را با علامت مثبت و اگر به منفی منبع برسیم، ولتاژ آن را با علامت منفی در معادله منظور می‌کنیم.

ج : به تعداد حلقه‌ها معادله نوشته می‌شود. پس n معادله با n مجهول به‌دست می‌آید. مجهولات جریان‌های حلقه‌ها هستند و با حل معادله‌ها جریان‌ها به‌دست می‌آیند در نتیجه، ولتاژها و توان‌های تمامی عناصر مدار محاسبه شدنی است.

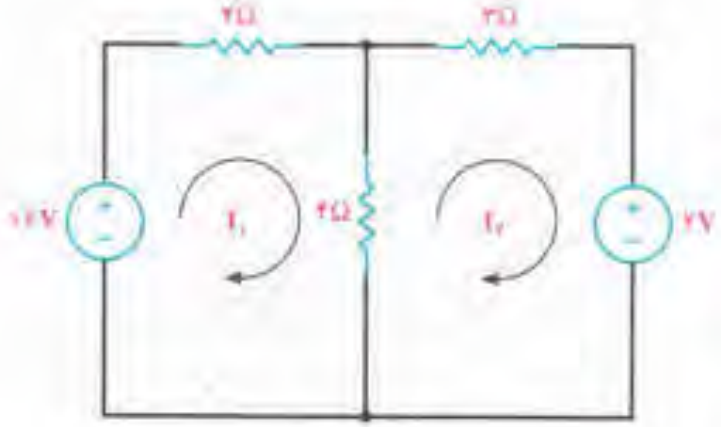
مثال۶ــ۱: در مدار شکل ۱۵ــ۱ توانی را که هر منبع به مدار می‌دهد، حساب کنید.



شکل ۱۵ــ۱

راه حل:

الف: مدار را تاحد ممکن ساده کرده و برای هر حلقه جریانی را در جهت حرکت عقربه‌های ساعت منظور می‌کنیم (شکل ۱۶ــ۱).



شکل ۱۶ــ۱

ب: از یک نقطه در هر حلقه حرکت می‌کنیم و معادلات K.V.L. را می‌نویسیم.

$$\text{در حلقه ۱} \rightarrow 2I_1 + 4(I_1 - I_2) - 16 = 0$$

$$\text{در حلقه ۲} \rightarrow 3I_2 + 2 + 4(I_2 - I_1) = 0$$

پ: معادله‌ها را مرتب کرده و حل می‌کنیم.

$$\begin{cases} 6I_1 - 4I_2 = 16 \\ -4I_1 + 7I_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow I_1 = 4A, I_2 = 2A$$

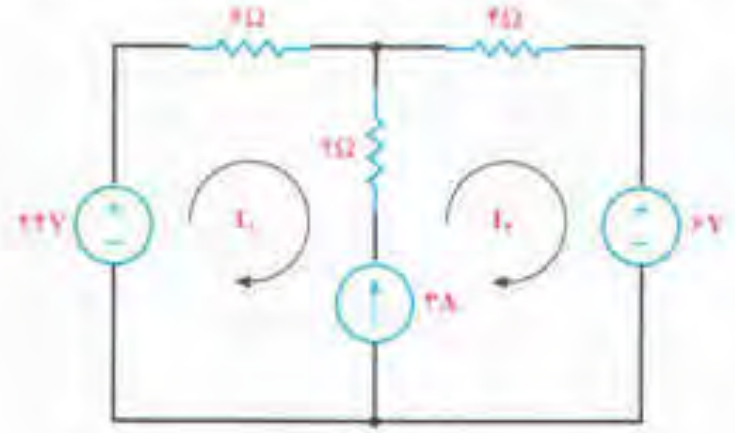
ت: برای محاسبه‌ی توان هر منبع باید به جهت جریان نیز توجه داشت. اگر جریان از پلاریته‌ی مثبت منبع خارج شود، توان آن منبع در یک منفی ضرب می‌شود. چنان‌چه حاصل توان منفی باشد یعنی، مولد به شبکه توان می‌دهد و اگر توان مثبت شد، یعنی، مولد، خود مصرف‌کننده شده است.

$$P_{16V} = -(16 \times I_1) = -(16 \times 4) = -64[W]$$

$$P_{2V} = (2 \times I_2) = (2 \times 2) = 4[W]$$

پس معلوم می‌شود که منبع ۱۶ ولت ۶۴ وات توان به مدار می‌دهد ولی منبع ۲ ولت، ۴ وات توان مصرف می‌کند. در نتیجه، مشخص است که مقاومت‌های موجود در مدار در مجموع ۶۰ وات توان مصرف می‌کنند.

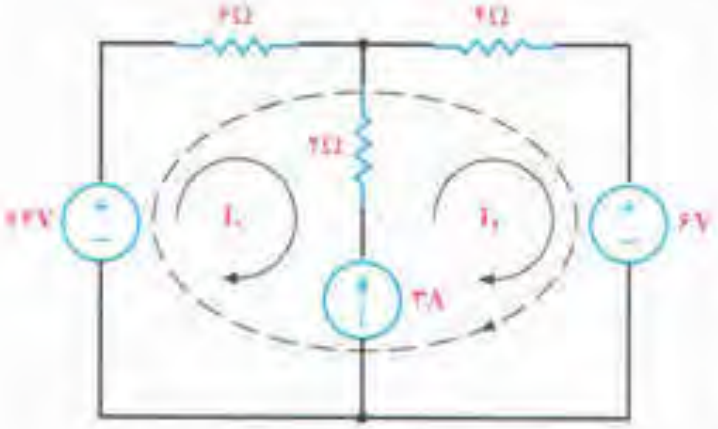
مثال ۷ــ ۱: در مدار شکل ۱۷ــ۱ توان مصرفی در مقاومت ۶ اهم را محاسبه کنید.



شکل ۱۷ــ۱

راه حل:

الف : مدار فوق ساده شده و جریان‌ها نیز تعیین شده‌اند و وقت آن است که معادلات K.V.L نوشته شوند. اما در این مدار نمی‌توان معادله‌ی ولتاژها را برای حلقه‌های ۱ و ۲ نوشت ؛ زیرا ولتاژ دوسر منبع جریان مشخص نیست.



شکل ۱۸ــ۱

در چنین مواردی، معادله‌ی ولتاژ را برای یک حلقه‌ی بزرگ می‌نویسند که منبع جریان در آن وجود ندارد (شکل ۱۸ــ۱). در این صورت، تعداد معادلات از تعداد مجهولات یکی کم‌تر می‌شود اما با توجه به معلوم بودن مقدار منبع جریان، یک معادله هم می‌توان برای آن نوشت. در نتیجه، تعداد معادلات و مجهولات برابر می‌شود و دستگاه معادلات قابل حل خواهد شد.

ب : معادلات را می‌نویسیم :

$$\text{برای حلقه‌ی بزرگ} \rightarrow 6I_1 + 4I_2 + 6 - 24 = 0$$

$$\text{برای منبع جریان} \rightarrow 3 = I_2 - I_1$$

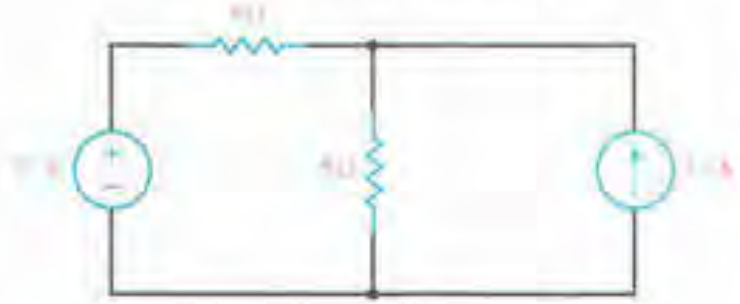
پ : دستگاه معادلات دو مجهولی را حل می‌کنیم و I_1 را به‌دست می‌آوریم.

$$\left.\begin{matrix} -I_1 + I_2 = 3 \\ 6I_1 + 4I_2 = 18 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 10I_1 = 6 \Rightarrow I_1 = 0/6A$$

ت : توان در مقاومت ۶ اهم برابر است با :

$$P_{6\Omega} = 6 \times I_1^2 = 6 \times 0/6^2 = 2/16[W]$$

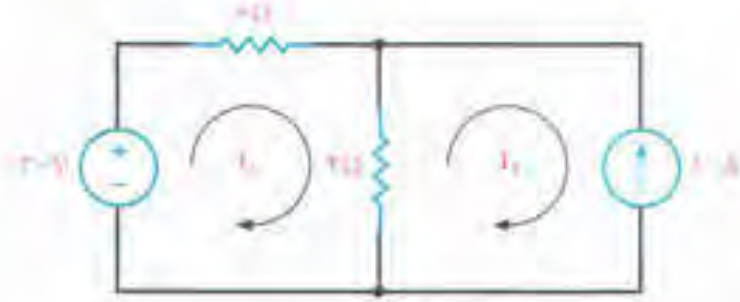
مثال ۸ــ۱: توان مصرفی در مقاومت ۴ اهم را در شکل ۱۹ــ۱ به روش جریان حلقه محاسبه کنید.



شکل ۱۹ــ۱

راه حل:

الف : ابتدا جریان حلقه‌ها را تعیین می‌کنیم (شکل ۲۰ــ۱).



شکل ۲۰ــ۱

ب : سپس معادلات حلقه را می‌نویسیم. ملاحظه می‌کنید که باز هم برای حلقه‌ی دوم نمی‌شود معادله‌ی K.V.L نوشت ؛ زیرا ولتاژ دو سر منبع جریان مشخص نیست ولی مقدار I_2 از شکل پیداست و برابر ۱۰− آمپر است. پس کافی است معادله‌ی K.V.L. را برای حلقه‌ی اول بنویسیم، آن را حل کنیم و جریان I_1 را به‌دست آوریم.

$$\text{در حلقه ۱} \rightarrow 6I_1 + 4(I_1 + I_2) - 30 = 0$$

$$I_2 = -10A$$

$$6I_1 + 4(I_1 + 10) - 30 = 0 \rightarrow 10I_1 = -10 \rightarrow I_1 = -1A$$

ب : جریان مقاومت ۴Ω برابر است با :

$$I_{4\Omega} = I_1 - I_2 = -1 + 10 = 9A$$

ت : توان در مقاومت ۴Ω نیز برابر است با :

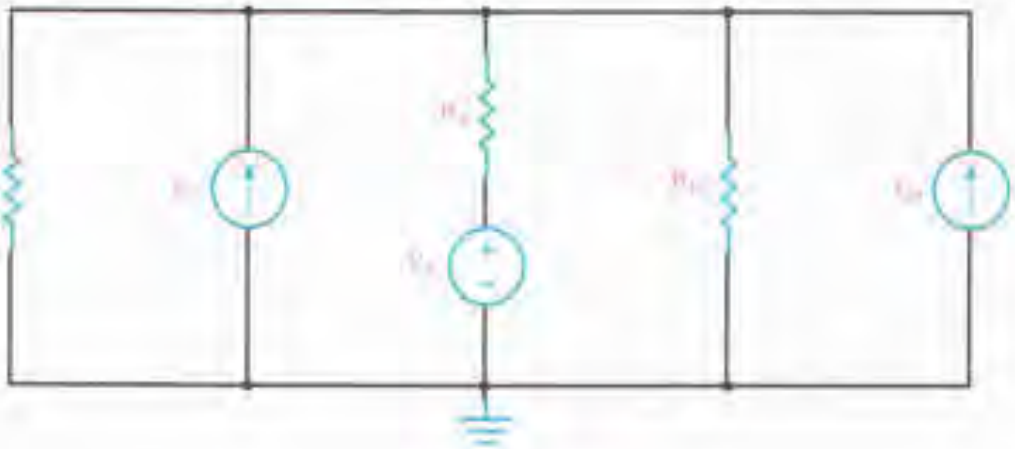
$$P_{4\Omega} = 4 \times 9^2 = 324[W]$$

همان طور که دیدید، مثال را به هر سه روش اصل جمع آثار، پتانسیل گره و جریان حلقه حل

کردیم و در هر سه مورد به یک پاسخ رسیدیم. پس مدارها را به روش‌های مختلف می‌توان تحلیل کرد ولی باید ببینیم که کدام روش ساده‌تر به نتیجه می‌رسد. به نظر می‌رسد اگر در مداری تعداد حلقه‌ها زیاد ولی تعداد گره‌ها کم باشد، استفاده از روش پتانسیل گره مناسب‌تر است و اگر تعداد حلقه‌ها کم‌تر از تعداد گره‌ها باشد، استفاده از روش جریان حلقه بهتر است؛ زیرا معادلات کم‌تری تشکیل می‌شود و حل کردن آن‌ها ساده‌تر است.

۶ــ۱ــ تبدیل منابع ولتاژ و جریان به یک‌دیگر

در تحلیل مدارهای الکتریکی مواردی پیش می‌آید که به‌نظر می‌رسد اگر به‌جای منبع ولتاژ، یک منبع جریان در مدار قرار داشته باشد، تحلیل مدار ساده‌تر انجام می‌گیرد. به شکل ۲۱ــ۱ توجه کنید. اگر در این مدار به‌جای منبع واقعی V_s یک منبع جریان واقعی وجود داشت، همه‌ی منابع مقاومت‌های مدار با هم موازی بودند و به راحتی با یک محاسبه مقاومت معادل، استفاده از قوانین اهم وجریان‌های کیرشهف ولتاژ V به‌دست می‌آمد. مطلب یادشده این فکر را به‌وجود می‌آورد که چگونه می‌توان منابع ولتاژ و جریان را جایگزین یک‌دیگر کرد. برای این منظور، چنان چه منابع را جایگزین هم کنیم، نباید در شرایط مصرف‌کننده تغییری ایجاد شود. پس اگر منبع ولتاژی را جایگزین منبع جریانی کنیم بدون آن که جریان و ولتاژ مصرف‌کننده تغییر کند، می‌توان گفت این دو منبع معادل هم هستند. با توجه به‌توضیحات فوق منابع معادل را هم به‌صورت زیر می‌توان محاسبه کرد.

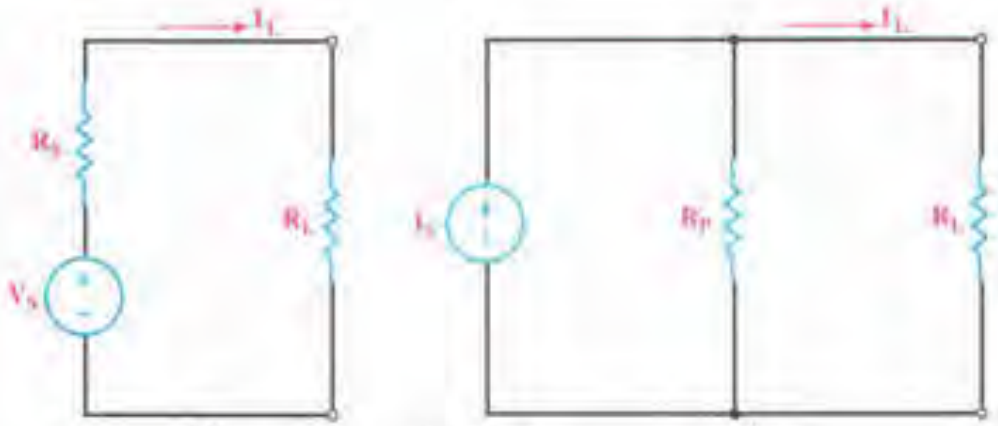


شکل ۲۱ــ۱

به شکل‌های ۲۲ــ۱ نگاه کنید؛ مصرف‌کننده‌ی R_L در هر دو مدار یکی است. ابتدا جریان مصرف‌کننده‌ها را در هر دو مدار حساب می‌کنیم.

در مدار «الف» داریم:

$$I_L = I_S \frac{R_P}{R_L + R_P}$$



شکل ۲۲ـ۱

در مدار «ب» داریم :

$$I_L = \frac{V_S}{R_L + R_S}$$

اکنون برای این که دو منبع شکل‌های ۲۲ـ۱ معادل هم باشند، باید جریان I_L در هردو حالت برابر باشد. با مساوی قرار دادن جریان‌ها داریم :

$$\frac{V_S}{R_L + R_S} = \frac{I_S R_P}{R_L + R_P}$$

در معادله‌ی بالا اگر صورت کسرها باهم برابر باشند، زمانی تساوی برقرار می‌شود که مخرج کسرها نیز باهم برابر باشند. در این صورت می‌توان نوشت :

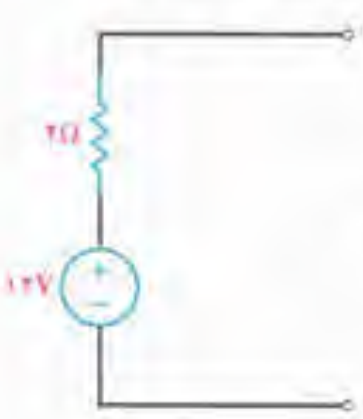
$$R_L + R_S = R_L + R_P \rightarrow R_S = R_P$$

و

$$V_S = I_S R_P$$

در این‌جا می‌توان نتیجه گرفت که برای تبدیل یک منبع جریان به منبع ولتاژ، مقاومت داخلی منبع ولتاژ با مقاومت داخلی منبع جریان برابر است و ولتاژ آن از حاصل‌ضرب جریان در مقاومت داخلی منبع به‌دست می‌آید. به‌عکس، اگر بخواهیم منبع ولتاژی را به منبع جریان تبدیل کنیم، کافی است ولتاژ منبع را بر مقاومت داخلی آن تقسیم کنیم تا مقدار منبع جریان معادل به‌دست آید. بدیهی است که مقاومت داخلی منبع جریان نیز به اندازه‌ی مقاومت داخلی منبع ولتاژ خواهد بود.

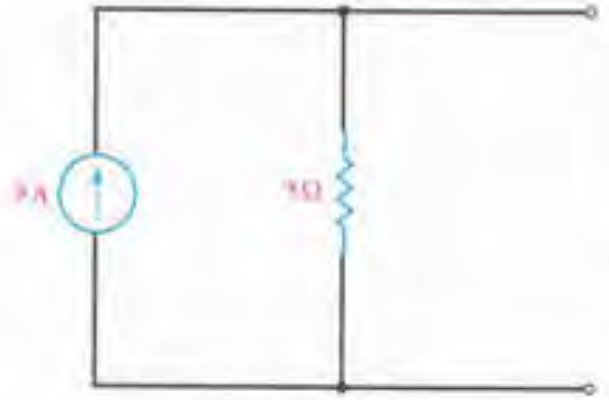
مثال ۹ـ۱: منبع جریان معادل منبع ولتاژ شکل ۲۳ـ۱ را به‌دست آورید.



شکل ۲۳ـ۱

راه حل:

$$R_P = 2\Omega \text{ و } I_S = \frac{12}{2} = 6A$$



شکل ۲۴ـ۱

پس منبع جریان معادل به صورت شکل ۲۴ـ۱ درمی‌آید.

مثال ۱۰ـ۱: در شکل ۲۵ـ۱ ابتدا جریان مصرف‌کننده (R_L) را حساب کنید. سپس منبع ولتاژ معادل منبع جریان مدار را محاسبه کرده شکل مدار را رسم کنید و بار دیگر جریان مصرف کننده را محاسبه نمایید.

شکل ۲۵ـ۱

راه حل:

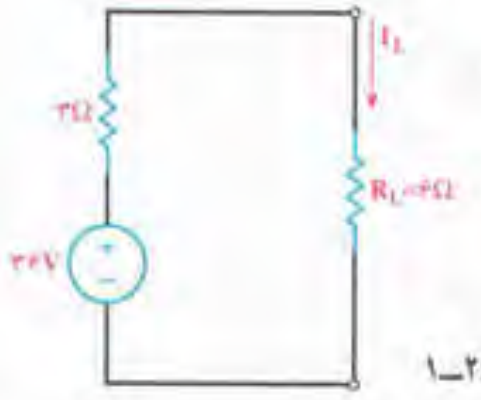
$$I_L = ۱۲ \times \frac{۳}{۳+۶} = ۴A$$

$$R_S = ۳\Omega \text{ و } V_S = ۱۲ \times ۳ = ۳۶V$$

اکنون مدار را به صورت شکل ۲۶ـ۱ خواهد شد.

در این حالت، جریان I_L را داریم:

$$I_L = \frac{۳۶}{۳+۶} = ۴A$$



شکل ۲۶ـ۱

ملاحظه می‌کنید که جریان مصرف‌کننده باز هم ۴ آمپر است. بدیهی است ولتاژ و توان مصرفی آن نیز تغییر نمی‌کند.

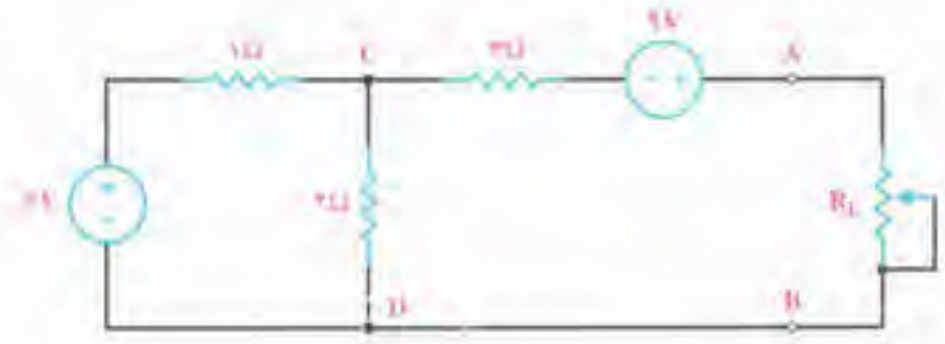
لازم به یادآوری است که منابع ایده‌آل را نمی‌توان به یک‌دیگر تبدیل کرد.

۷ــ۱ــ تبدیلات تونن و نورتن مدارهای الکتریکی

در تجزیه و تحلیل مدارهای الکتریکی به مواردی برخورد می‌کنیم که مدار از عناصر زیادی درست شده است و تعداد زیادی گره و حلقه دارد اما هدف ما فقط بررسی یک عنصر در مدار است و می‌خواهیم بدانیم با تغییرات این عنصر، مثلاً جریان یا توان آن چه تغییراتی خواهد داشت. در این مورد، تحلیل تکراری مدار بسیار مشکل خواهد بود. حتی اگر از روش‌های رایانه‌ای نیز برای تحلیل استفاده کنیم، باز محاسبه‌های مکرر به زمان بیش‌تری نیاز دارد. برای ازبین بردن این مشکل راه‌حل‌هایی ارایه شده است. به این ترتیب که همیشه می‌توان تمامی عناصر مدار را از دو سر بار یا عنصر موردنظر به‌صورت یک منبع واقعی جریان یا ولتاژ، معادل‌سازی کرد. اگر مدار را به‌صورت یک منبع ولتاژ واقعی معادل‌سازی کنیم، مدار را **معادل تونن** گویند و اگر مدار به‌صورت منبع جریان واقعی معادل‌سازی شود، آن را **معادل نورتن مدار** گویند. در این‌جا با ذکر مثال‌هایی چگونگی محاسبه‌ی معادل تونن و نورتن مدارهای الکتریکی را بیان می‌کنیم. تونن و نورتن دو دانشمند بودند که در زمینه‌ی مخابرات کار می‌کردند.

۱ــ۷ــ۱ــ معادل تونن مدارهای الکتریکی: برای به‌دست آوردن معادل تونن مدار، ابتدا بار یا عنصر موردنظر را از مدار جدا می‌کنیم، سپس اختلاف پتانسیل بین دو نقطه‌ای را که بار از آن‌جا جدا شده است، به یکی از روش‌های تحلیل که قبلاً آموخته‌ایم محاسبه می‌کنیم. ولتاژ به‌دست آمده که به آن **ولتاژ مدار باز** (V_{oc}) گفته می‌شود، همان ولتاژ تونن (V_{th}) مدار است. برای به‌دست آوردن مقاومت معادل مدار، تمام منابع را بی‌اثر می‌کنیم (منابع جریان باز و منابع ولتاژ اتصال کوتاه). سپس با نگاه از دو نقطه‌ای که بار از آنجا باز شده به مدار، مقاومت معادل کل را به‌دست می‌آوریم. این مقاومت تونن مدار (R_{th}) خواهد بود.

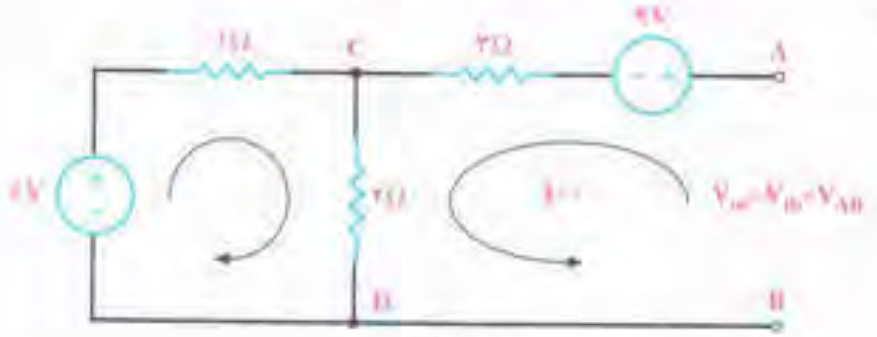
مثال ۱۱ــ۱: در مدار شکل ۲۷ــ۱ برای این که بتوانیم اثر تغییرات بار را بررسی کنیم، معادل تونن مدار را به‌دست می‌آوریم.



شکل ۲۷ــ۱

راه حل:

۱ـ ابتدا مطابق شکل ۲۸ـ۱ بار را از مدار جدا کرده و سپس ولتاژ بین دو پایانه‌ی A و B را محاسبه می‌کنیم.



شکل ۲۸ـ۱

در مدار شکل ۲۸ـ۱ بین دو نقطه‌ی A و B باز است؛ بنابراین از مقاومت ۳Ω جریانی نمی‌گذرد و ولتاژ آن صفر است. پس طبق قانون K.V.L می‌توان نوشت:

$$V_{OC} = ۹ + ۰ + V_{CD}$$

از طرفی به دلیل باز بودن حلقه‌ی سمت راست ولتاژ، مقاومت ۲ اهم را می‌توان به روش تقسیم ولتاژ به‌دست آورد. پس می‌توان نوشت:

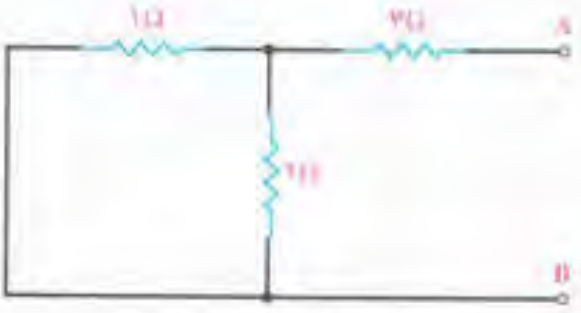
$$V_{CD} = ۶ \times \frac{۲}{۱+۲} = ۴[V]$$

بنابراین، داریم:

$$V_{OC} = ۹ + ۴ = ۱۳[V] = V_{th}$$

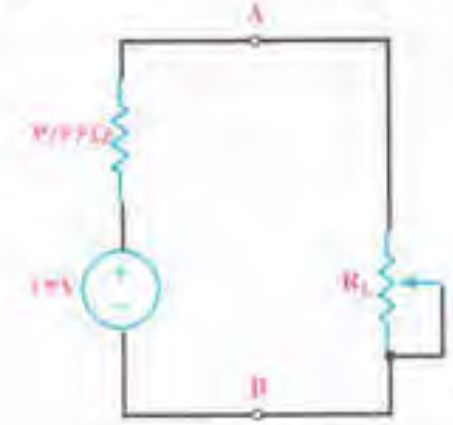
۲ـ اکنون منابع ولتاژ مدار را مطابق شکل ۲۹ـ۱ بی‌اثر می‌کنیم و مقاومت معادل آن را از دو پایانه‌ی A و B به‌دست می‌آوریم.

$$R_{th} = \frac{۱ \times ۲}{۱+۲} + ۳ = ۳/۶۶[\Omega]$$



شکل ۲۹ـ۱

۳ـ اکنون معادل تونن مدار به‌صورت شکل ۳۰ـ۱ به‌دست آمده است. می‌توان بار را به مدار معادل وصل کرد (شکل ۳۱ـ۱) و تحلیل لازم را انجام داد.



شکل ۳۰ـ۱

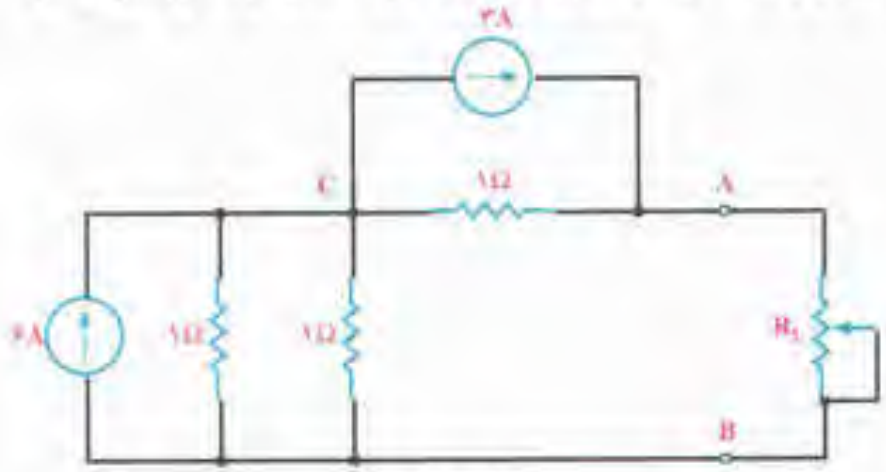
شکل ۳۱ـ۱

۲ـ۷ـ۱ـ معادل نورتن مدارهای الکتریکی: برای به‌دست آوردن معادل نورتن مدار، باز هم ابتدا بار را از مدار جدا می‌کنیم. برای به دست آوردن مقاومت معادل نورتن مدار (R_N) نیز درست به همان صورتی عمل می‌کنیم که هنگام به‌دست آوردن مقاومت معادل تونن انجام دادیم. پس می‌توان گفت مقاومت‌های معادل تونن و نورتن یکی هستند ($R_N = R_{th}$) اما برای محاسبه‌ی جریان معادل نورتن مدار، پس از باز کردن بار، دو پایانه‌ای را که بار از آن‌جا باز شده است اتصال کوتاه می‌کنیم و سپس جریان عبوری از این اتصال کوتاه را محاسبه می‌کنیم. این جریان که به جریان مدار اتصال کوتاه (I_{SC}) معروف است، همان جریان معادل نورتن مدار (I_N) می‌باشد.

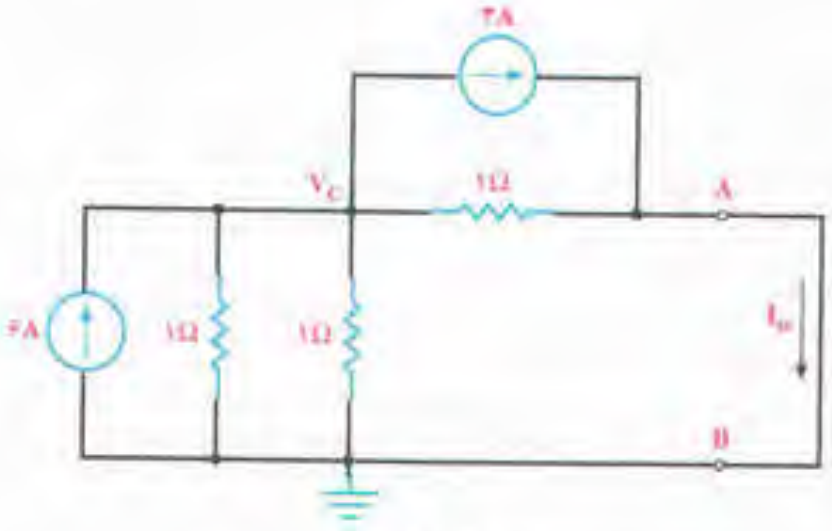
مثال ۱۲ـ۱: در شکل ۳۲ـ۱ معادل نورتن مدار را به‌دست آورید.

راه حل:

۱ـ ابتدا بار را جدا کرده و دو پایانه‌ی A و B را اتصال کوتاه می‌کنیم (شکل۳۳ـ۱).



شکل ۳۲ـ۱



شکل ۳۳ـ۱

۲ـ این مدار را می‌توان از روش پتانسیل گره حل کرد و I_{SC} را محاسبه نمود. توجه داشته باشید که در این حالت، گره‌های A و B به یک گره تبدیل می‌شوند. پس می‌توان نوشت:

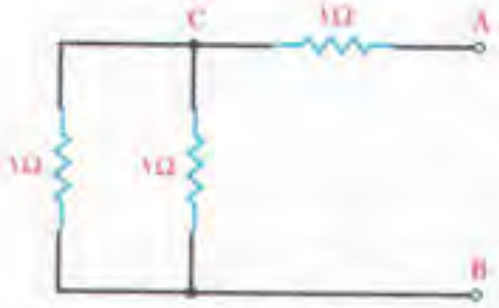
$$\text{در گره C} \rightarrow -۶+\frac{V_c}{۱}+\frac{V_c}{۱}+\frac{V_c}{۱}+۳=۰ \rightarrow V_c=۱[V]$$

به این ترتیب، جریان در هریک از مقاومت‌ها نیز یک آمپر است، و همگی از گره C خارج می‌شوند. جریان I_{SC} نیز از مجموع دو جریان (یکی منبع ۳A و دومی مقاومت) به‌دست می‌آید. پس داریم:

$$I_{SC}=۳+۱=۴[A]=I_N$$

۳ـ مقاومت معادل نورتن با بی‌اثر کردن منابع ـ درحالی که مقاومت بار باز شده است ـ به‌دست می‌آید (شکل ۳۴ـ۱).

$$R_N=\frac{۱\times ۱}{۱+۱}+۱=۱/۵\Omega$$



شکل ۳۴ـ۱

۴ـ معادل نورتن مدار و مدار کامل به صورت شکل‌های ۳۵ـ۱ است.

الف: معادل نورتن مدار ب: مدار کامل با بار

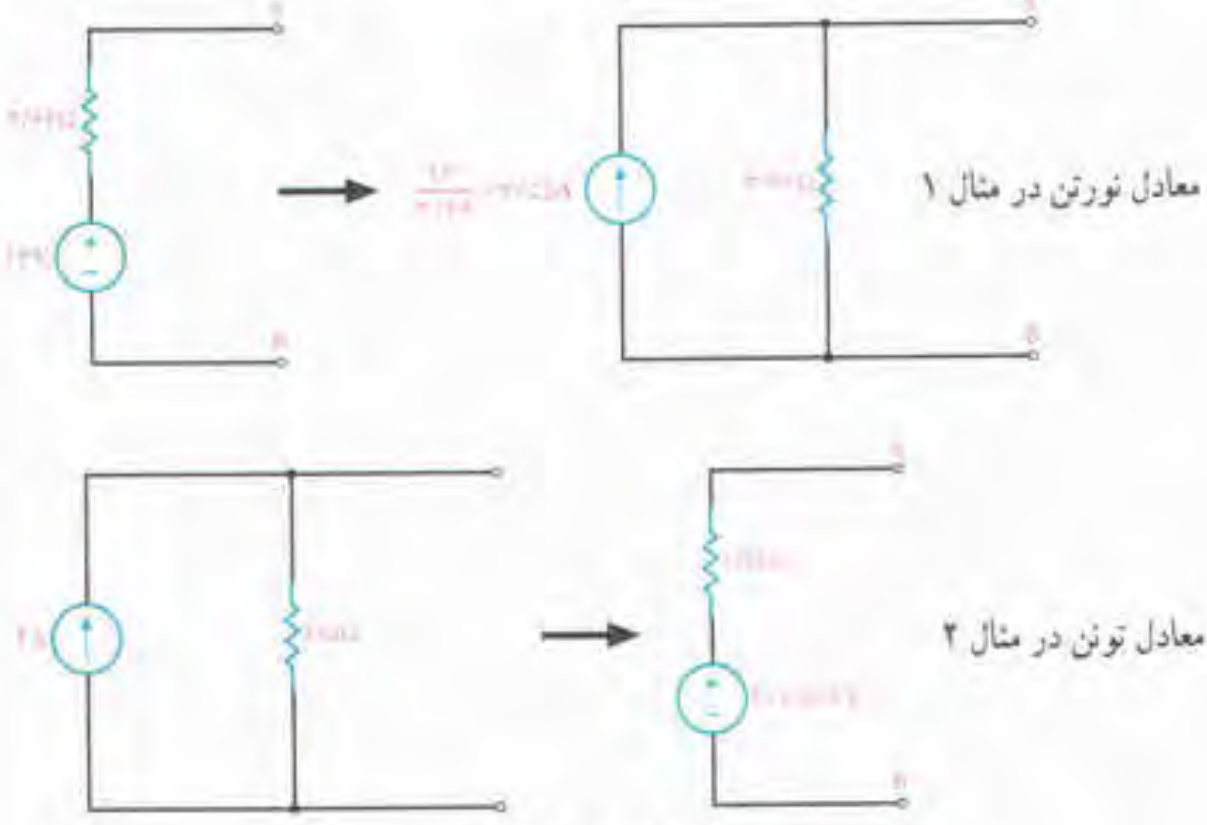
شکل ۳۵ـ۱

گاهی ممکن است معادل تونن مداری را داشته باشیم و سپس به دنبال معادل نورتن همان مدار بگردیم یا به عکس معادل نورتن را داشته و به دنبال معادل تونن باشیم. در این گونه موارد به راحتی می‌توانیم با تبدیل منابع، معادل دیگر را برای مدار به‌دست آوریم.

مثال ۱۳ـ۱: در مثال ۱ معادل نورتن و در مثال ۲ معادل تونن مدار را به‌دست آورید.

راه حل: (شکل‌های ۳۶ـ۱)

تذکر: برای جلوگیری از اشتباه و تعیین جهت صحیح جریان منابع و پلاریته‌ی ولتاژ آن‌ها به‌جهت جریان اتصال کوتاه (I_{SC}) و هم‌چنین به پلاریته‌ی ولتاژ مدار باز (V_{OC}) کاملاً دقت کنید.



معادل نورتن در مثال ۱

معادل تونن در مثال ۲

شکل ۳۶ـ۱

۸ــ۱ــ انتقال ماکزیمم توان به بار

یکی از مسائلی که در مدارهای الکتریکی مطرح می‌شود، این است که در چه شرایطی می‌توان ماکزیمم توان ممکن را به بار منتقل کرد. از آن‌جا که منابع تغذیه دارای مقاومت داخلی هستند، تمامی توانی را که به مدار تحویل می‌دهند به بار نمی‌رسد. انتقال ماکزیمم توان ممکن رابه بار، **تطابق** می‌گویند. به‌خصوص در مدارهای الکترونیک که عناصر زیادی در مدار وجود دارد و مدار از قسمت‌ها و طبقات مختلفی درست شده است، ایجاد تطابق بین طبقات مختلف مدار و انتقال ماکزیمم توان از یک طبقه به طبقه‌ی دیگر مسئله‌ی مهمی است. در نتیجه، چگونگی انتقال ماکزیمم توان مورد توجه قرار می‌گیرد. اگر مقاومت بار صفر باشد، چون دوسر ولتاژ صفر می‌شود پس توان آن نیز صفر خواهد بود. از طرفی، اگر مقاومت بار بی‌نهایت باشد، به دلیل صفر بودن جریان این بار توان آن نیز صفر می‌شود. بدیهی است اگر بار دارای ولتاژ و جریان باشد، دارای توان نیز خواهد بود. پس اگر مقاومت بار از صفر بزرگ شود و تا بی‌نهایت افزایش یابد، توان آن از صفر بزرگ می‌شود و مجدداً به صفر برمی‌گردد. در این بین حالتی وجود دارد که توان مصرف‌کننده به بیشترین مقدار می‌رسد. محاسبه‌ها نشان می‌دهند که زمانی ماکزیمم بار به مصرف‌کننده منتقل می‌شود که مقاومت بار با مقاومت داخلی منبع تغذیه برابر باشد.

اگر مدار دارای عناصر زیادی باشد، می‌توان با به‌دست آوردن معادل تونن یا نورتن مدار از دوسر بار، تمامی مدار را به صورت یک منبع ولتاژ یا جریان واقعی نشان داد. در این صورت، می‌توان گفت زمانی ماکزیمم توان به بار منتقل می‌شود که مقاومت بار با مقاومت معادل تونن یا نورتن مدار برابر باشد.

مثال ۱۴ــ۱: یک مولد جریان مستقیم با تحریک مستقل و مقاومت آرمیچر ۰/۲ اهم، نیروی محرکه‌ی ۱۲۰ ولت را تولید می‌کند. این مولد در چه جریانی می‌تواند ماکزیمم توان را به بار بدهد؟ در این حال توان مصرف‌کننده چند وات است؟

اگر مقاومت بار یک‌بار ۰/۱۹ و بار دوم ۰/۲۱ اهم باشد، توان مصرفی چند وات می‌شود؟

راه حل:

اولاً در این صورت مقاومت مصرف کننده با مقاومت داخلی مولد ــ یعنی ۰/۲ اهم ــ برابر خواهد بود. پس می‌توان نوشت:

$$I=\frac{E}{R_A+R_L}=\frac{۱۲۰}{۰/۲+۰/۲}=۳۰۰A$$

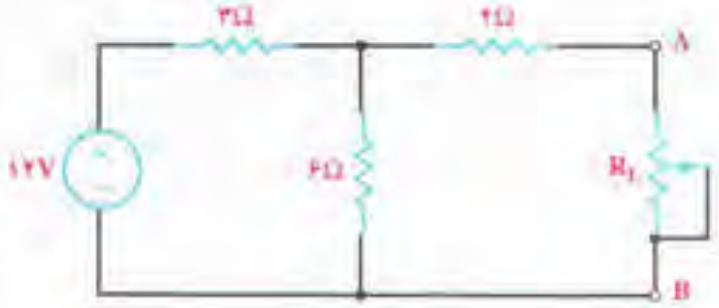
$$P_{max.}=R_L\times I^۲=۰/۲\times ۳۰۰^۲=۱۸۰۰۰[W]$$

$$P_{r1} = R_L\left[\frac{E}{R_A + R_L}\right]^2 = ۰/۱۹ \times \left[\frac{۱۲۰}{۰/۲ + ۰/۱۹}\right]^2 = ۱۷۹۸۸[W] \qquad \text{ثانیاً :}$$

$$P_{r2} = ۰/۲۱ \times \left[\frac{۱۲۰}{۰/۲ + ۰/۲۱}\right]^2 = ۱۷۹۸۹[W]$$

ملاحظه می‌شود توان مصرفی در هر دو حالت فرض دوم از حالت اول کم‌تر است ؛ یعنی، وقتی مقاومت بار از ۰/۲ یا کمتر از آن زیادتر شود، توان مصرفی کوچک شده است. پس در مقاومت ۰/۲ اهم، توان مصرفی ماکزیمم است.

مثال ۱۵ــ۱: در مدار شکل ۱ــ۳۷ ماکزیمم توانی که می‌تواند به بار منتقل شود، چند وات است و در چه مقدار از مقاومت بار حاصل می‌شود؟



شکل ۱ــ۳۷

راه حل:

ابتدا مقاومت بار را از مدار جدا کنیم و معادل تونن مدار را از دو نقطه‌ی A و B به‌دست می‌آوریم. با توجه به این که در صورت باز شدن R_L از مقاومت ۲ اهمی جریان نمی‌گذرد و ولتاژ آن صفر است، پس V_{OC} همان ولتاژ دو سر مقاومت ۶ اهم است. در نتیجه، می‌توان نوشت :

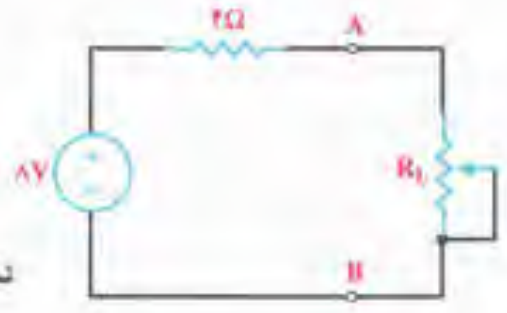
$$V_{th} = V_{OC} = V_{۶\Omega} = ۱۲ \times \frac{۶}{۳ + ۶} = ۸[V]$$

$$R_{th} = \frac{۳ \times ۶}{۳ + ۶} + ۲ = ۲ + ۲ = ۴\Omega$$

اکنون مدار را به صورت شکل ۱ــ۳۸ داریم :

پس برای انتقال ماکزیمم توان R_L باید مساوی ۴ اهم باشد و توان ماکزیمم در R_L برابر است با :

$$P_{max} = \left(\frac{۸}{۴ + ۴}\right)^2 \times ۴ = ۴[W]$$



شکل ۱ــ۳۸

۹ــ۱ــ مدارهای شامل سلف و خازن

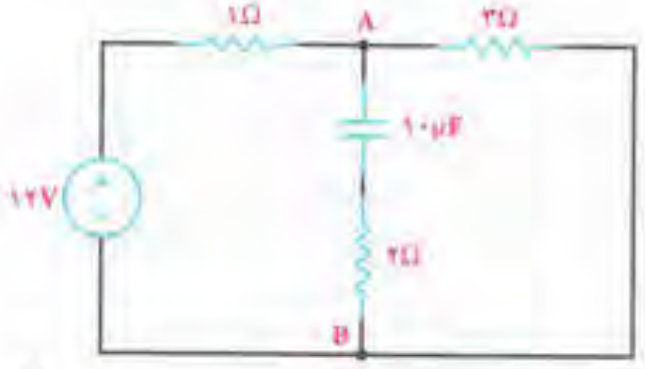
همان‌طور که در درس میانی برق خواندید، وقتی یک خازن به منبع ولتاژ جریان مستقیم وصل می‌شود، ابتدا جریان نسبتاً بزرگی درمدارجریان می‌یابد و خازن رفته رفته شارژ می‌شود تا ولتاژ دوسر آن به اندازه‌ی ولتاژ منبع برسد. در همین حالت، جریان مدار هم به‌تدریج کاهش می یابد تا وقتی که خازن کاملاً شارژ شود. در این حالت، جریان مدار به صفر می‌رسد. پس از این فرایند که حدود ۵ ثابت زمانی طول می‌کشد، خازن در مدار مانند یک کلید باز عمل می‌کند. وقتی ۵ ثابت زمانی سپری می‌شود، در اصطلاح می‌گویند مدار به حالت پایدار یا ماندگار خود رسیده است. پس در مدارهای جریان مستقیم و در حالت ماندگار، خازن به‌صورت یک کلید باز عمل می‌کند. در حالی که به اندازه‌ی ولتاژ اعمال شده به دوسر آن، شارژ شده است. هم‌چنین ملاحظه کردید که سلف در مدار با تغییرات جریان مخالف است ؛ بنابراین، وقتی در یک مدار جریان مستقیم شامل سلف، کلید مدار را وصل می‌کنیم، ابتدا سلف با ایجاد یک ولتاژ خودالقایی در خلاف جهت ولتاژ اعمال شده، با برقراری جریان مخالفت می‌کند ؛ و جریانِ کمی در مدار جاری می‌شود اما رفته رفته این مخالفت کاهش می‌یابد و از بین می‌رود به‌طوری که پس از گذشت ۵ ثابت زمانی، جریان مدار به حداکثر مقدار خود می‌رسد و نیروی محرکه‌ی خودالقایی سلف صفر می‌شود. به‌طوری که می‌توان گفت وقتی یک مدار جریان مستقیم شامل سلف به حالت ماندگار می‌رسد، ولتاژ دو سر سلف صفر است و سلف به‌صورت یک هادی اتصال کوتاه عمل می‌کند. در واقع دیگر در مدار دیده نمی‌شود و نقشی ندارد. البته در این حالت، به‌دلیل عبور جریان از سلف، مقداری انرژی در آن ذخیره می شود. ضمن این که جریان مدار ماکزیمم است. از زمان کلیدزنی تا زمان پایدار شدن را می‌گوییم مدار در حالت گذراست.

از آن‌جا که در عمل در بسیاری موارد و به‌خصوص در وسایل الکترونیکی به مدارهای جریان مستقیمی برمی‌خوریم که از عناصر غیرفعالی چون سلف، خازن و مقاومت اهمی درست شده‌اند، به‌حل کردن نمونه‌هایی از این مدارها درحالت پایدار می‌پردازیم. لازم به ذکر است که بررسی مدارها در حالت گذر از حیطه‌ی این درس خارج است و در دوره‌های عالی‌تر به آن می‌پردازند.

مثال ۱۶ــ۱: مدار شکل ۱ــ۳۹ در حالت ماندگار است. مطلوب است محاسبه‌ی :

الف : جریان مقاومت ۳ اهمی.

ب ــ انرژی ذخیره شده در خازن.

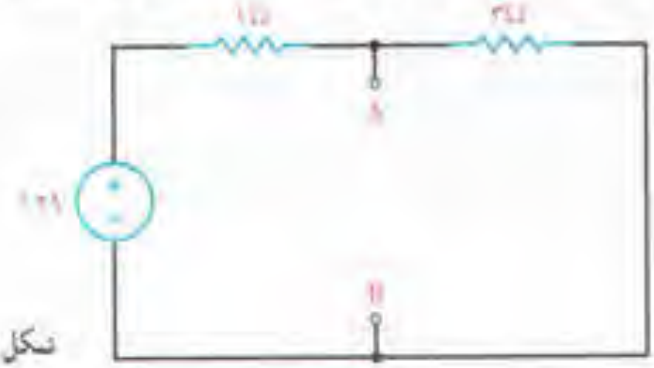


شکل ۱ــ۳۹

راه حل:

الف ــ در حالت ماندگار، خازن شارژ می‌شود و مانند کلید باز عمل می‌کند. پس مدار به‌صورت شکل ۴۰ــ۱ درمی‌آید و جریان مقاومت ۳ اهمی برابر است با :

$$I_{3\Omega} = \frac{12}{1+3} = 3A$$



شکل ۴۰ــ۱

ب : اختلاف‌پتانسیل بین دو نقطه‌ی A و B برابر است با :

$$V_{AB} = 3\Omega \times 3A = 9V$$

چون از شاخه‌ی خازن‌دار جریان عبور نمی‌کند، پس ولتاژ دوسر مقاومت ۲ اهمی صفر و ولتاژ شارژ خازن همان ۹ ولت است. در نتیجه، داریم :

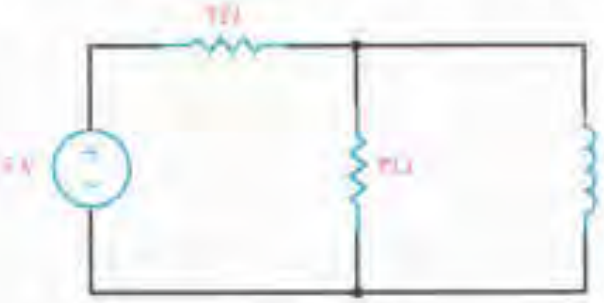
$$W_C = \frac{1}{2}CV_{AB}^2 = \frac{1}{2} \times 10 \times 10^{-6} \times 9^2 = 405 \times 10^{-6} \text{ ژول}$$

همان‌طور که می‌بینید، با وجود این که جریان خازن صفر است ولی در آن مقداری انرژی ذخیره شده است.

مثال ۱۷ــ۱: مدار شکل ۴۱ــ۱ در حالت پایدار است. مطلوب است محاسبه‌ی :

الف : جریان مقاومت ۳ اهمی.

ب : انرژی ذخیره شده در سلف.



شکل ۴۱ــ۱

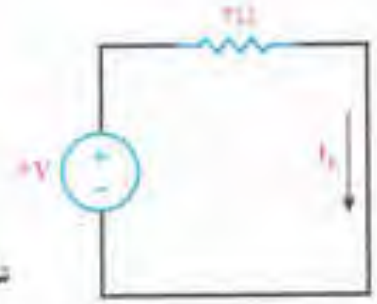
راه حل:

الف : در حالت ماندگار سلف، به‌صورت اتصال کوتاه عمل می‌کند ؛ یعنی مدار به‌صورت شکل ۴۲ــ۱ درمی‌آید و چون دوسر مقاومت ۳ اهمی اتصال کوتاه است، پس جریان از آن نمی‌گذرد و داریم : $I_{3\Omega} = 0$

شکل ۴۲ــ۱

ب : در حالت ماندگار، مدار به‌صورت شکل ۴۳ـ۱ است. در نتیجه، جریانی کـه از سلف می‌گذرد برابر است با :

$$I_L = \frac{۶V}{۲\Omega} = ۳A$$

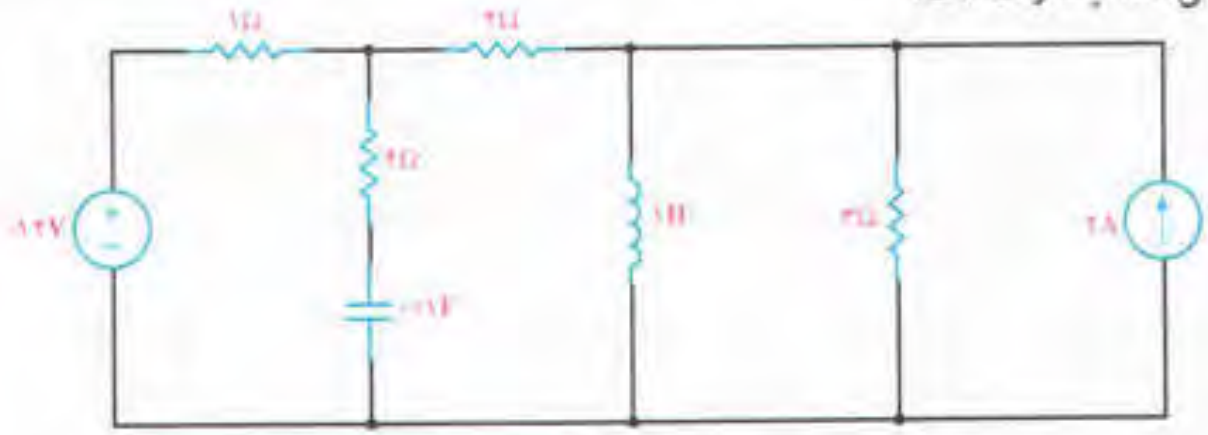


شکل ۴۳ـ۱

پس انرژی ذخیره شده در سلف برابر است با :

$$W_L = \frac{۱}{۲}LI_L^۲ = \frac{۱}{۲}\times ۱ \times ۳^۲ = ۴/۵ \text{ ژول}$$

مثال ۱۸ـ۱: مدار شکل ۴۴ـ۱ در حالت پایدار است. توانی که منبع ۱۲ ولت به مدار می‌دهد، چند وات است؟

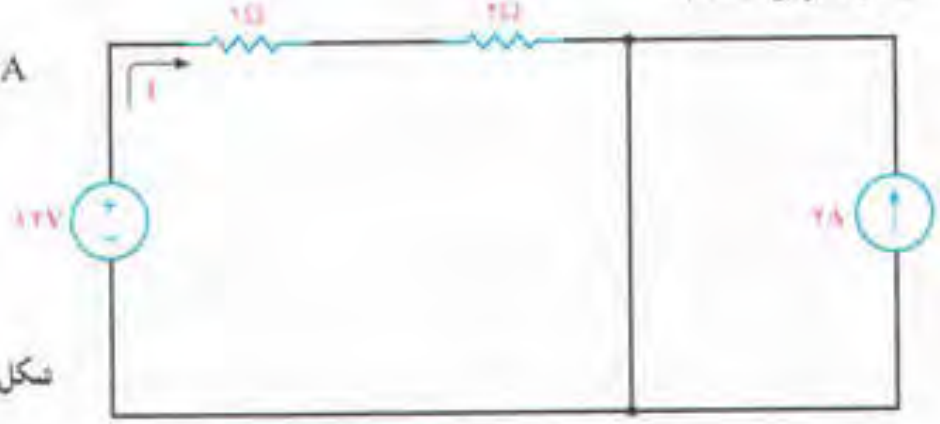


شکل ۴۴ـ۱

راه حل:

چون مدار در حالت پایدار قرار دارد، پس سلف اتصال کوتاه و خازن مدار باز است. در نتیجه، مقاومت ۳ اهم نیز اتصال کوتاه است و مدار به‌صورت شکل ۴۵ـ۱ درمی‌آید. در این مدار، مقدار I برابر است با :

$$I = \frac{۱۲}{۱+۲} = ۴A$$



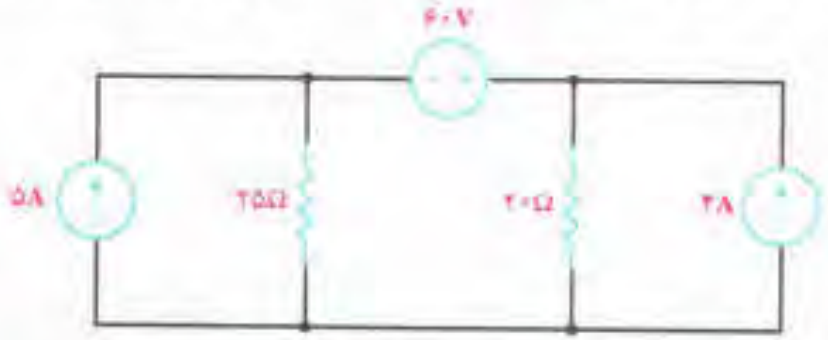
شکل ۴۵ـ۱

و توانی که منبع ۱۲ ولت به مدار تزریق می‌کند برابر است با:

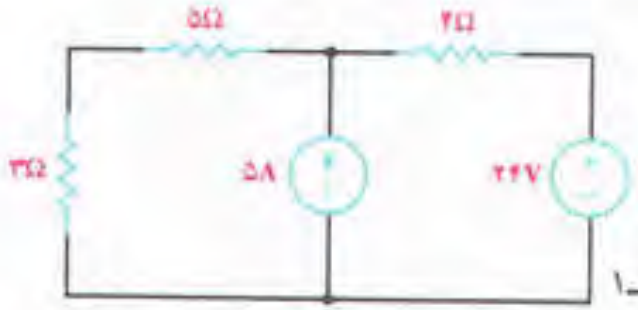
$P_{۱۲V} = ۱۲ \times ۴ = ۴۸$ وات

۱ـ۱ـ تمرین‌ها

۱ـ در مدار شکل ۱ـ۴۶ با استفاده از روش پتانسیل گره، توان منبع ولتاژ را محاسبه کنید.



شکل ۱ـ۴۶

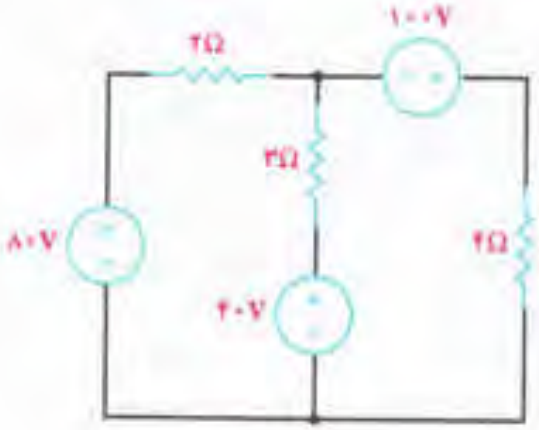


۲ـ در شکل ۱ـ۴۷ با استفاده از اصل جمع آثار، توان را در مقاومت ۳ اهمی محاسبه کنید.

شکل ۱ـ۴۷

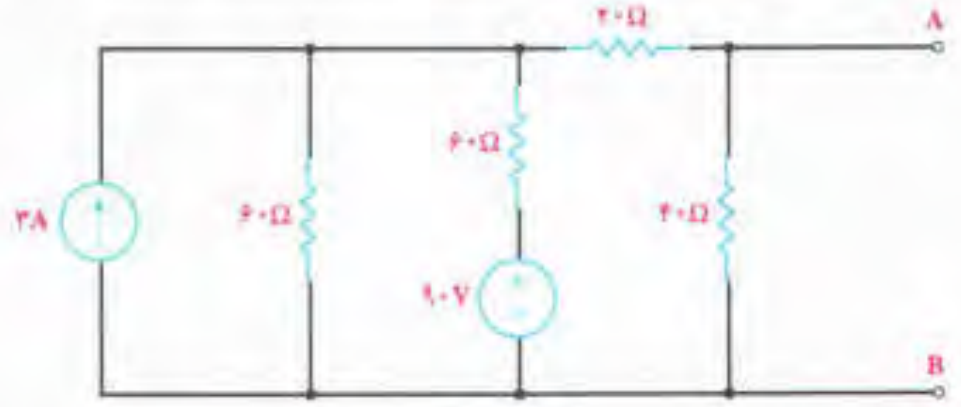
۳ـ در مدار شکل ۱ـ۴۶ ابتدا منابع جریان را به منبع ولتاژ تبدیل کنید و سپس به کمک روش جریان حلقه، جریان منبع ۶۰ ولت را حساب کنید.

۴ـ در مدار شکل ۱ـ۴۸ با استفاده از روش جریان حلقه، توان مصرفی در مقاومت ۳ اهمی را حساب کنید.



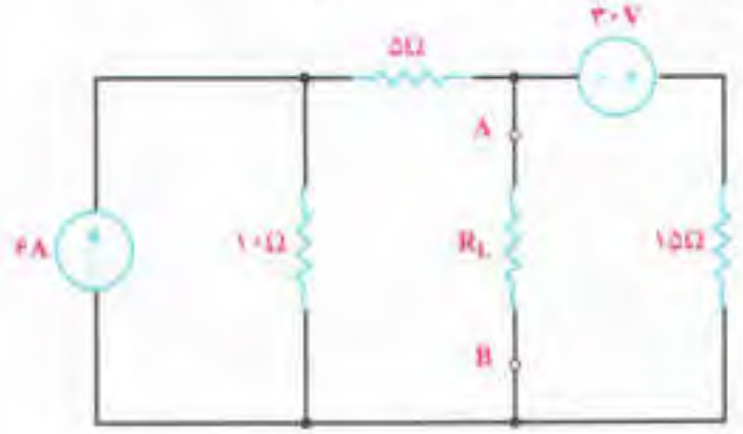
شکل ۱ـ۴۸

۵ــ در شکل ۴۹ــ۱ معادل تونن مدار را از دو پایانه‌ی a و b محاسبه و رسم کنید.



شکل ۴۹ــ۱

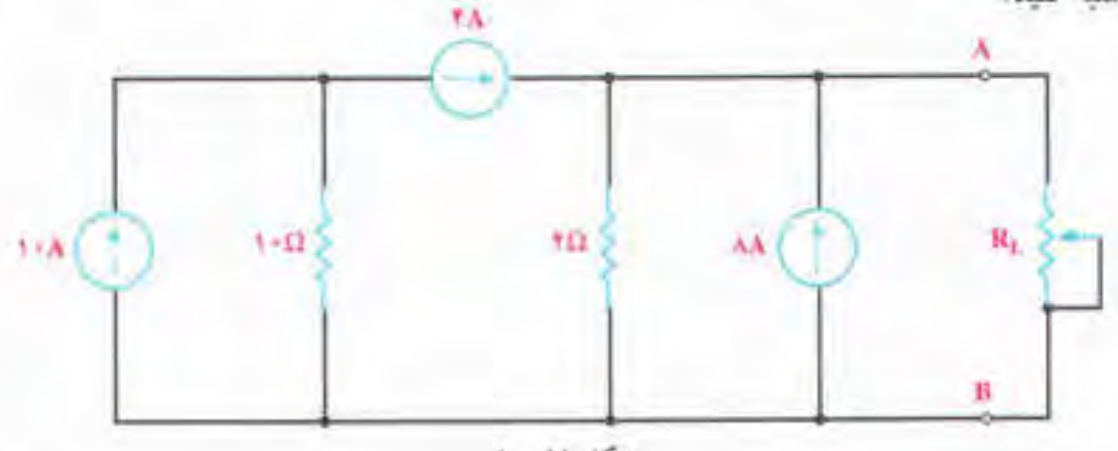
۶ــ در شکل ۵۰ــ۱ معادل نورتن مدار را از دو پایانه‌ی a و b محاسبه و رسم کنید. سپس با استفاده از تبدیل منابع، معادل تونن مدار را به‌دست آورید.



شکل ۵۰ــ۱

۷ــ در شکل ۵۰ــ۱ معادل تونن مدار را با محاسبه‌ی V_{OC} به‌دست آورید.

۸ــ در شکل ۵۱ــ ۱ مقاومت بار و توان آن را در حالتی که توان انتقالی به بار ماکزیمم باشد، محاسبه کنید.



شکل ۵۱ــ۱

۹ــ در مدار شکل ۴۷ــ۱ توان مصرفی مقاومت ۳ اهمی را یک بار با استفاده از روش پتانسیل گره و بار دیگر با استفاده از روش جریان حلقه محاسبه کنید.

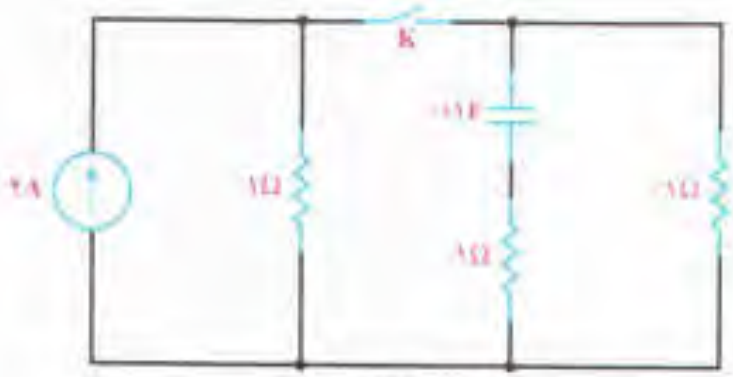
۱۰ــ در شکل ۴۶ــ۱ توان منبع ولتاژ ۶۰ ولتی را با استفاده از روش جریان حلقه و بدون تبدیل منابع، محاسبه کنید.

۱۱ــ در مدار شکل ۴۸ــ۱، توان مصرفی مقاومت ۳ اهمی را با استفاده از روش پتانسیل گره حساب کنید.

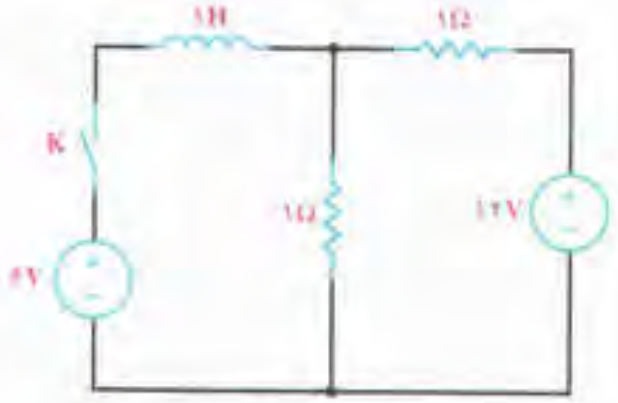
۱۲ــ در شکل‌های ۴۹ــ۱ و ۵۰ــ۱ ماکزیمم توانی را که می‌تواند به بار منتقل شود، حساب کنید. در این حالت مقاومت‌های بار چند اهم هستند؟

۱۳ــ در مدارهای شکل‌های ۵۲ــ۱ و ۵۳ــ۱ پس از وصل شدن کلید K و سپری شدن ۵ ثابت زمانی، انرژی ذخیره شده در سلف و خازن را حساب کنید.

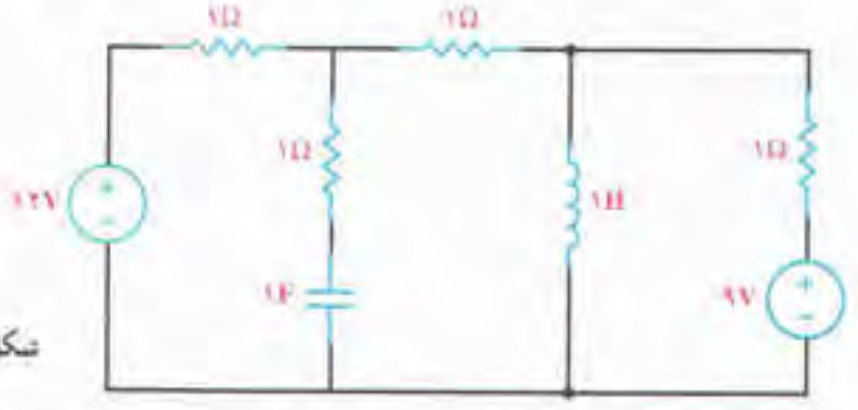
۱۴ــ مدار شکل ۵۴ــ۱ درحالت ماندگار است. توانی که هرکدام از منابع به مدار می‌دهند، چند وات است؟



شکل ۵۲ــ۱



شکل ۵۳ــ۱

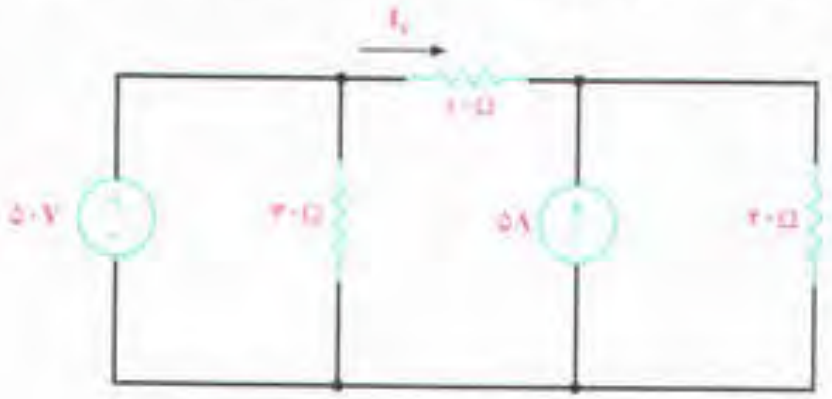


شکل ۵۴ــ۱

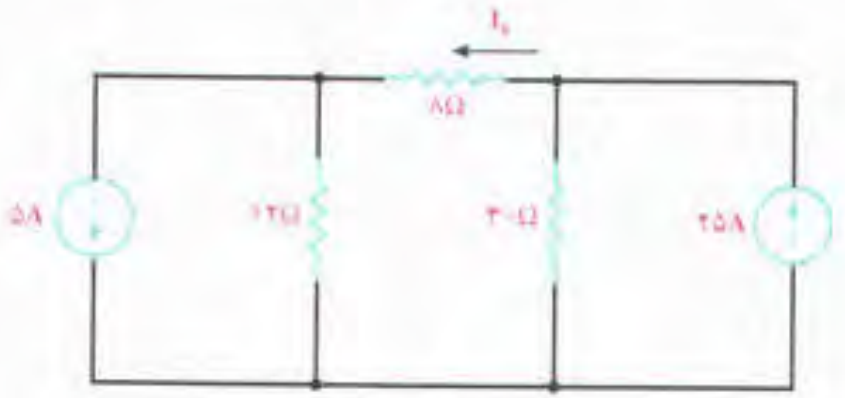
۱۱ــ۱ــ تمرین‌های مکمل

برای تمرین بیش‌تر مسائل تکمیل‌کننده‌ی زیر را حل کنید.

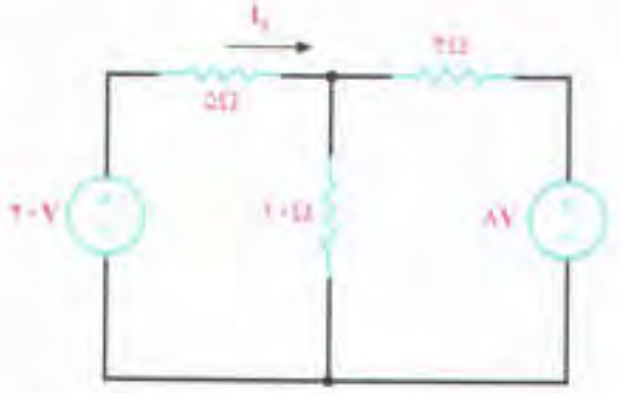
۱ــ در مدارهای شکل ۵۵ــ۱ ، ۵۶ــ۱ و ۵۷ــ۱ مطلوب است محاسبه‌ی جریان I_X با استفاده از روش‌های الف : اصل جمع آثار ب : پتانسیل گره پ : جریان حلقه.



شکل ۵۵ــ۱



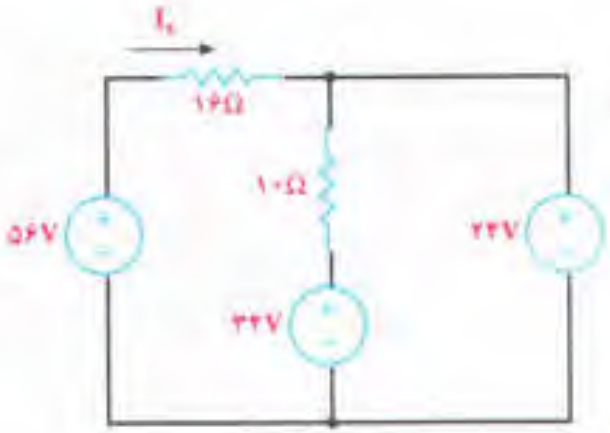
شکل ۵۶ــ۱



شکل ۵۷ــ۱

۲ــ در مدار شکل ۵۸ــ۱ مطلوب است :

الف : جریان I_X .



شکل ۵۸ ــ ۱

ب : توان مصرفی در مقاومت ۱۰ اهمی.

ب : توان تولیدی منبع ولتاژ ۲۴ ولتی.

۳ــ در مدار شکل ۵۹ــ۱ مطلوب است

الف : جریان I_X.

ب : توان تولیدی منبع جریان ۳ آمپری

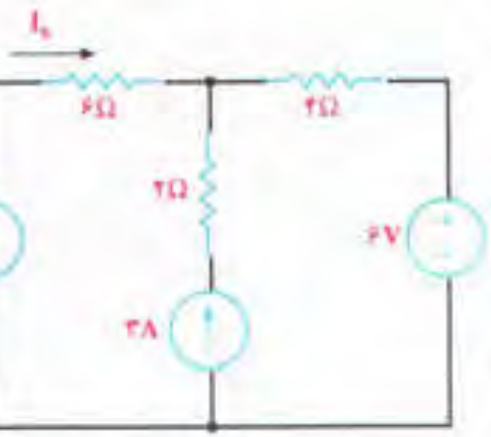
۴ــ در مدار شکل ۶۰ــ۱ مطلوب است پتانسیل V_X و جریان I_X با استفاده از روش‌های

الف : اصل جمع آثار.

ب : پتانسیل گره.

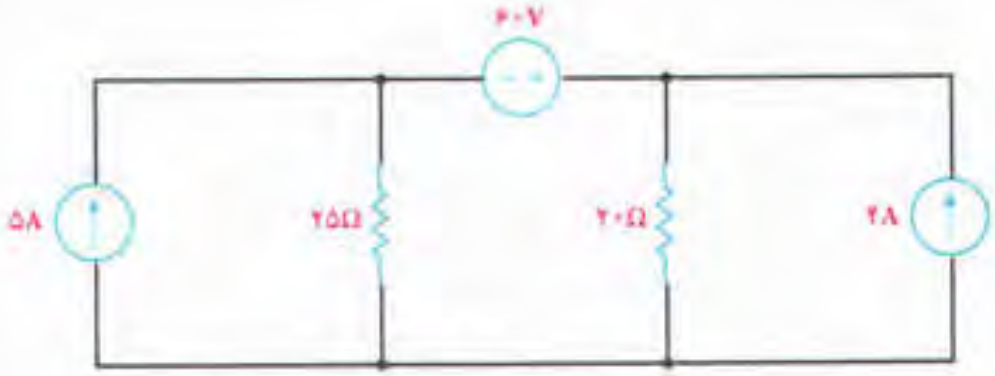
پ : جریان حلقه.

۵ــ در مدار شکل ۶۱ــ۱ ابتدا منابع جریان را به منبع ولتاژ تبدیل کنید. سپس با استفاده از روش جریان حلقه، توان تولیدی منبع ولتاژ ۶۰ ولتی را محاسبه کنید.



شکل ۵۹ ــ ۱

شکل ۶۰ ــ ۱



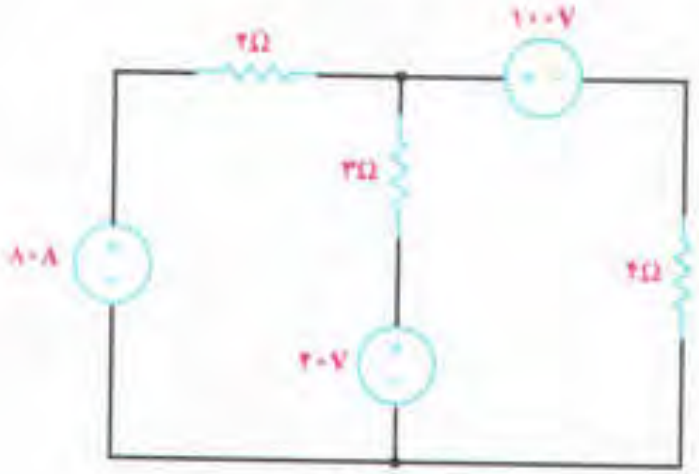
شکل ۶۱ ــ ۱

۶ــ در مدار شکل ۶۲ــ۱ با استفاده از روش جریان حلقه توان مصرفی در مقاومت ۳ اهمی را محاسبه کنید.

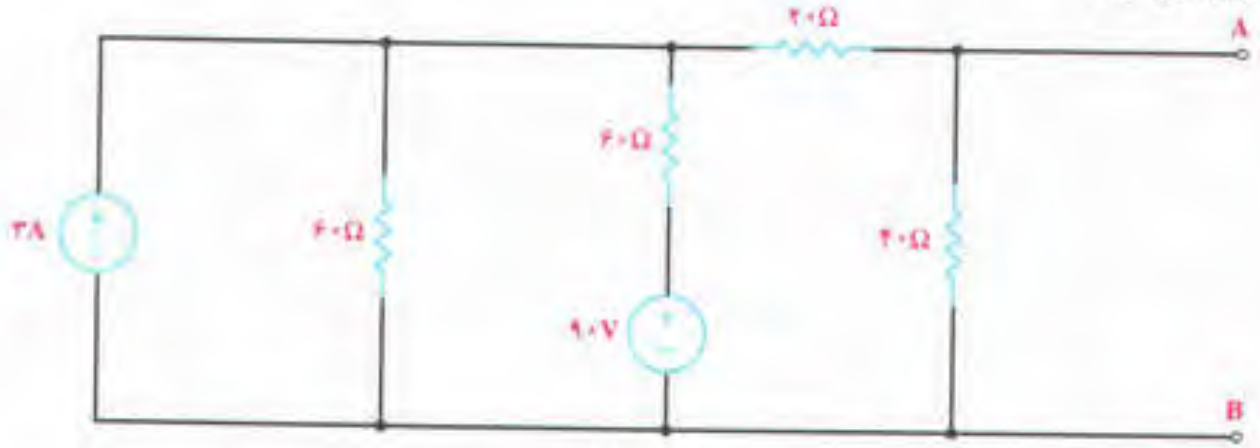
۷ــ در مدارهای شکل‌های ۶۳ــ۱ تا ۶۸ــ۱ مطلوب است :

الف : معادل تونن مدار از دو پایانه‌ی ab .

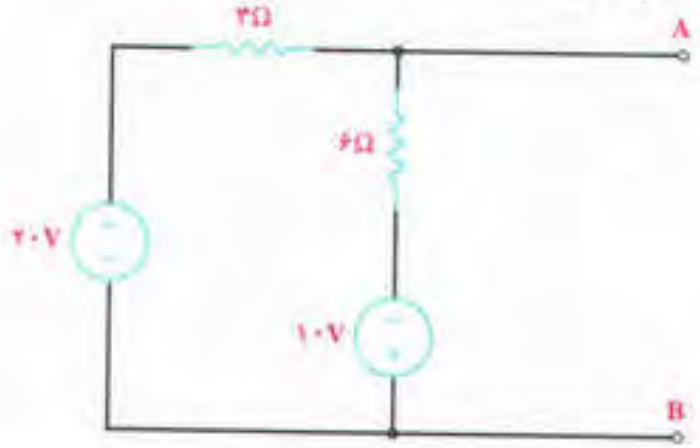
ب : معادل نورتن مدار از دو پایانه‌ی ab .



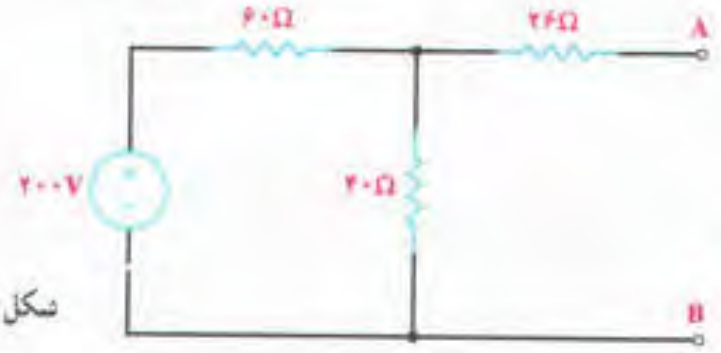
شکل ۶۲ــ۱



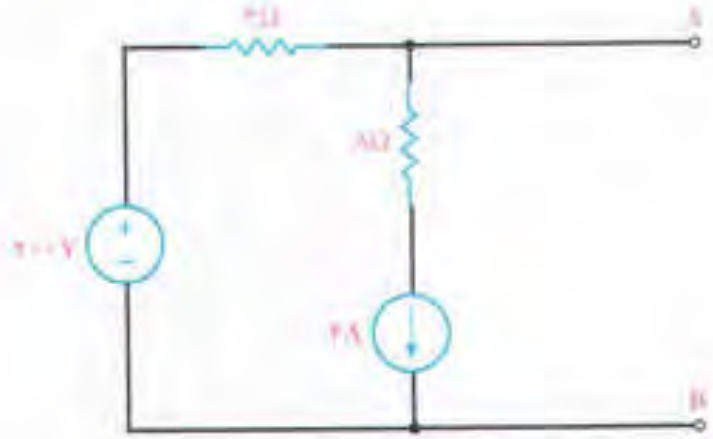
شکل ۶۳ــ۱



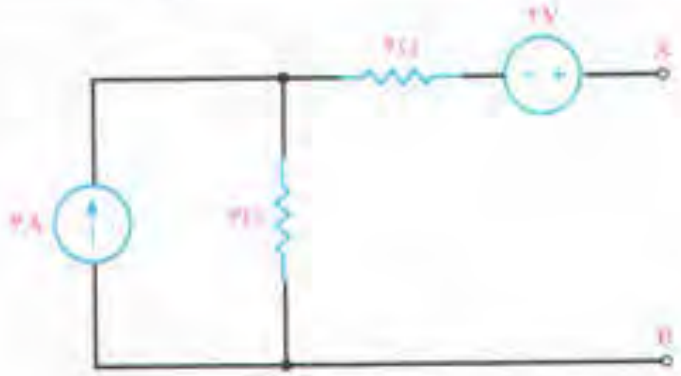
شکل ۶۴ــ۱



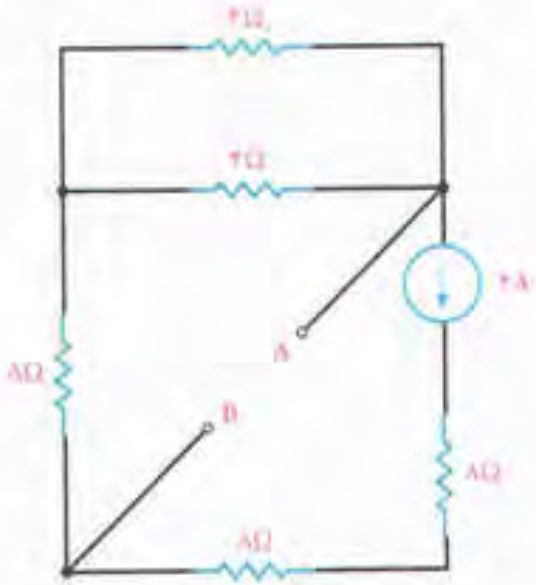
شکل ۶۵ــ۱



شکل ۶۶ـ۱



شکل ۶۷ـ۱



شکل ۶۸ـ۱

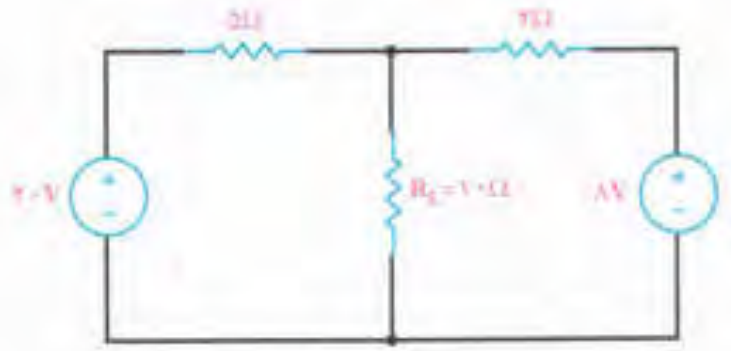
۸ـ در مدارهای شکل‌های ۶۹ـ۱ تا ۷۲ـ۱ با استفاده از روش تونن مطلوب است :

الف : جریان R_L

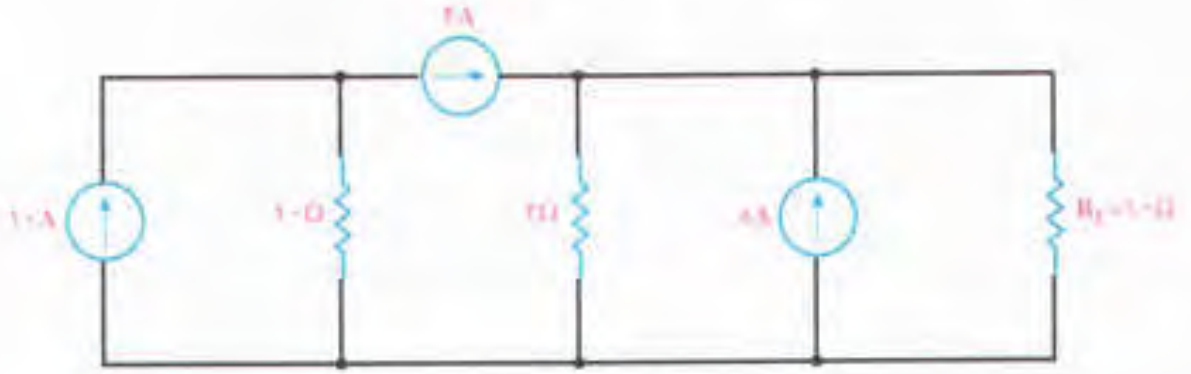
ب : ماکزیمم توان انتقالی به R_L به ازای کدام مقدار R_L است؟

۹ـ در مدارهای شکل ۶۹ـ۱ تا ۷۲ـ۱ با استفاده از روش نورتن، مطلوب است :

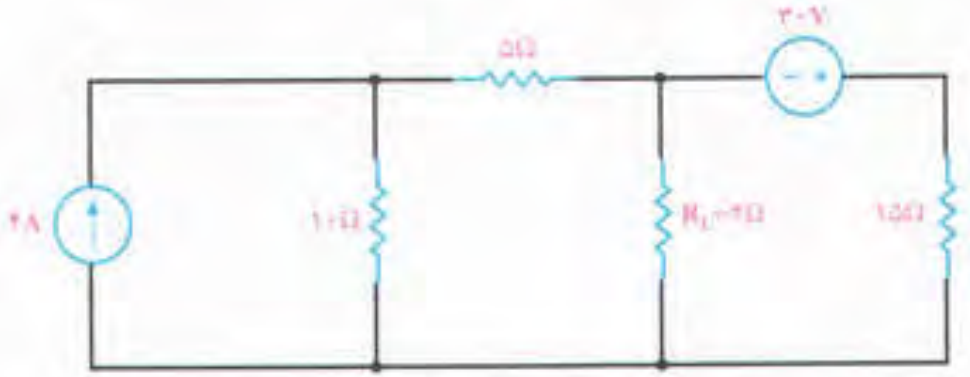
الف : جریان R_L ، ب : ماکزیمم توان انتقالی به R_L به ازای کدام مقدار R_L است؟



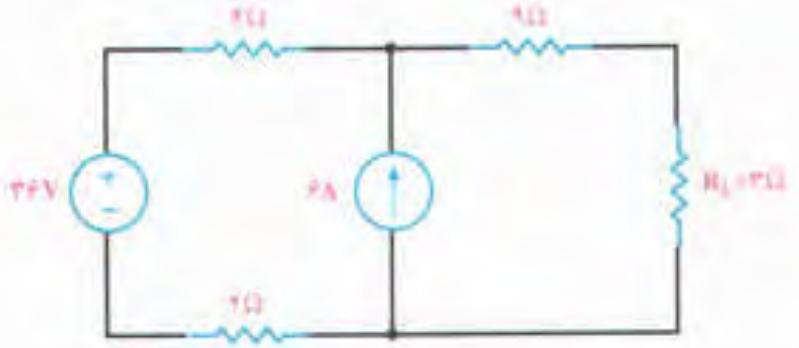
شکل ۶۹ــ۱



شکل ۷۰ــ۱



شکل ۷۱ــ۱



شکل ۷۲ــ۱

فصل دوم

بردار

هدف‌های رفتاری: در پایان این فصل از دانش‌آموز انتظار می‌رود :

۱ــ بردار را تعریف کند و هم‌سنگ یک بردار را به دست آورد.

۲ــ جمع و تفاضل بردارها را به روش هندسی معین کند.

۳ــ برایند چندین بردار را به روش تحلیلی محاسبه کند.

۴ــ ضرب داخلی دوبردار را تعریف کرده و اندازه‌ی ضرب داخلی آن‌ها را معین کند.

۵ــ مفهوم توان الکتریکی را شرح دهد.

۶ــ توان ظاهری، حقیقی، غیر مؤثر و ضریب توان را تعریف کند.

۷ــ توان ظاهری، حقیقی، غیر حقیقی و ضریب توان را از معادلات زمانی ولتاژ و جریان به دست آورد.

۸ ــ مثلث توان‌ها را رسم کند و از روی آن ضریب توان کل، توان اکتیو و راکتیو کل شبکه را تعیین کند.

۱ــ۲ــ مقدمه

رفتار مقاومت‌های اهمی، سلفی و خازنی خالص را در جریان متناوب در دروس گذشته مطالعه کردیم و آموختیم که جریان و ولتاژ در مقاومت اهمی هم‌فاز هستند. در سلف، خالص جریان از ولتاژ دوسر سلف ۹۰ درجه عقب‌تر و در خازن خالص جریان از ولتاژ دوسر خازن ۹۰ درجه جلوتر است اما سلف و خازن خالص تصوری بیش نیستند و در مدارهای حقیقی نمی‌توان یک سلف یا خازن خالص پیدا کرد. می‌دانیم یک سیم‌پیچ یا مقاومت سلفی از مقدار معینی هادی الکتریکی تشکیل می‌شود. هر هادی الکتریکی به طول l با توجه به رابطه‌ی $R = \rho \frac{l}{A}$ دارای مقاومت اهمی است. هم‌چنین یک خازن شارژ شده، پس از مدتی تخلیه می‌شود ؛ بنابراین، خازن باید یک مقاومت اهمی داشته باشد تا از طریق آن بارهای الکتریکی تخلیه شوند. این مقاومت را **مقاومت نشتی خازن**

می‌گویند. در تحلیل مدارهای الکتریکی برای کسب نتایج مطلوب، سلف و خازن حقیقی را به شکلهای L ـ R یا C ـ R مدل می‌کنند. این مدل ممکن است به صورت L ـ R یا C ـ R سری یا موازی در نظر گرفته شود. از طرف دیگر، ممکن است مدارهای الکتریکی از ترکیب عناصر سلفی، خازنی و اهمی تشکیل شوند. بنابراین، مطالعه‌ی مدارهای L ، C و R در اتصال‌های سری و موازی ضرورت دارد. از آن‌جا که رفتار عناصر L ، R و C در جریان متناوب یکسان نیست، در یک مدار شامل L ، R ، و C، برای تعیین ولتاژ قسمتی از مدار یا تعیین جریان آن، نمی‌توان از روش‌های جمع جبری ولتاژها یا جریان‌ها استفاده کرد. بدین جهت، برای تحلیل مدارهای R ـ L ـ C از بردارها و عملیات برداری استفاده می‌شود. از این رو قبل از مطالعه‌ی مدارهای R ـ L ـ C لازم است کمیت‌های برداری و عملیات بر روی آن‌ها را به دقت مطالعه کنیم.

۲ ـ ۲ ـ بردار چیست؟

مفهوم بعضی از کمیت‌های فیزیکی با بیان مقدار کمیت کاملاً روشن است؛ مثلاً وقتی می‌گوییم ۲۰ کیلو سیب یا به مدت ۲۰ دقیقه یا ۲۰ متر پارچه، همه مفهوم سخن ما را به‌طور روشن درمی‌یابند. چنین کمیت‌هایی را که با بیان اندازه کاملاً معرفی می‌شوند، **کمیت‌های عددی** یا **اسکالر** می‌گویند.

اگر رهگذری که با محل زندگی شما آشنایی کافی ندارد، از شما نشانه‌ی محلی را سؤال کند، او را چنین راهنمایی می‌کنید: «۲۰۰ متر مستقیم بروید، سپس به سمت چپ بپیچید و ۵۰۰ متر جلو بروید». اگر رهگذر بدون توجه به جهت‌های گفته شده فقط ۷۰۰ متر حرکت کند، آیا به محل مورد نظر خواهد رسید؟ جواب منفی است؛ زیرا فقط طی اندازه‌ی کمیت برای رسیدن به محل نشانی کافی نیست، باید جهت‌های گفته شده نیز رعایت شود. به چنین کمیت‌هایی که با بیان اندازه‌ی کمیت کامل نیستند و باید جهت آن‌ها مشخص شود، **کمیت برداری** می‌گویند. برای این که با کمیت‌های برداری و مشخصه‌های یک بردار بیش‌تر آشنا شویم، فرض می‌کنیم یک ذره مطابق شکل ۱ ـ ۲، موضع خود را از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B تغییر دهد. روشن است این جا به جایی، در مسیرهای بی‌شماری امکان‌پذیر است. از نظر ما جا به جایی مؤثر، طول پاره خط $\overline{AB}$ است. چون نقطه‌ی شروع جا به جایی A و نقطه‌ی انتهایی، B است و حرکت از نقطه A به سوی نقطه‌ی B صورت گرفته است. جا به‌جایی ذره در مسیر AB دارای ابتدا، انتها و مقدار ($\overline{AB}$) است. جهت جابه‌جایی از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B با پیکان نشان داده شده است. ذره‌ی متحرک در ادامه‌ی جابه‌جایی خود، از نقطه‌ی B به نقطه‌ی C تغییر مکان می‌دهد. روشن

شکل ۱ـ۲

است که جابه‌جایی مؤثر طول پاره خط $\overline{BC}$ است. در طول جا به جایی از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B و از نقطه‌ی B به نقطه‌ی C دَره جا به جایی مؤثر $\overline{AC}$ را خواهد داشت؛ بنابراین، می‌توان نوشت:

(جا به جایی مسیر AC) = (جا به جایی مسیر BC) + (جا به جایی مسیر AB)

از طرف دیگر، در مثلث ABC مجموع دو ضلع AB و BC از اندازه‌ی ضلع سوم ــ یعنی AC ــ بزرگ‌تر است.

$$\overline{AB}+\overline{BC}>\overline{AC}$$

مقایسه در جمع جبری و جا به جایی نشان می‌دهد که جمع جا به جایی با جمع جبری تفاوت دارد.

به طور کلی، یک کمیت برداری را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:

کمیتهای برداری کمیت‌هایی هستند که رفتار آن‌ها مانند رفتار جا به جایی است؛ دارای بزرگی[1]، جهت، ابتدا، انتها و راستا هستند و با قواعد معینی با هم جمع می شوند.

جا به جایی مسیر AB را به صورت $\vec{AB}$ نشان می‌دهند و آن را بردار AB می‌گویند. در این نمایش، A ابتدای بردار، B انتها و طول پاره‌خط $\overline{AB}$، اندازه‌ی آن و جهت این بردار از نقطه‌ی A به‌نقطه‌ی B است. اگر در شکل ۱ــ۲ جا به جایی در مسیر BC را به صورت $\vec{BC}$ نشان دهیم، می‌توانیم بنویسیم:

$$\vec{AB}+\vec{BC}=\vec{AC} \qquad (۲ــ۱)$$

۳ــ۲ــ هم‌سنگ (هم ارز) یک بردار

بردار $\vec{AB}$ واقع بر راستای D را در نظر می‌گیریم. اگر از نقطه دلخواه مانند M، بردار $\vec{MN}$ را چنان رسم کنیم که راستای آن با راستای $\vec{AB}$ موازی بوده و اندازه‌ی آن برابر اندازه‌ی $\overline{AB}$ و جهت آن با جهت $\vec{AB}$ یکسان باشد، در این حالت بردار $\vec{MN}$ را **هم‌سنگ بردار** $\vec{AB}$ گویند. در شکل ۲ــ۲ دو بردار هم‌سنگ $\vec{AB}$ و $\vec{MN}$ را می‌بینید. به طور خلاصه، برای دو بردار هم‌سنگ $\vec{MN}$ و $\vec{AB}$ می‌توان نوشت:

$$D\parallel D' \ , \ \overline{AB}=\overline{MN} \ , \ \vec{AB}=\vec{MN} \qquad (۲ــ۲)$$

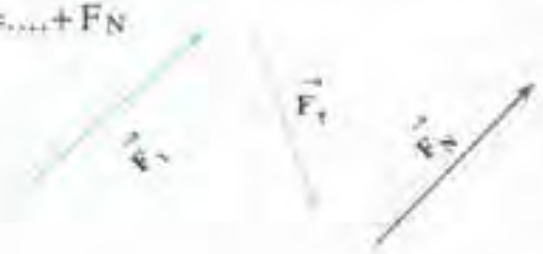
۱ــ بزرگی بردار را قدر مطلق، دامنه یا شدت بردار نیز می‌گویند.

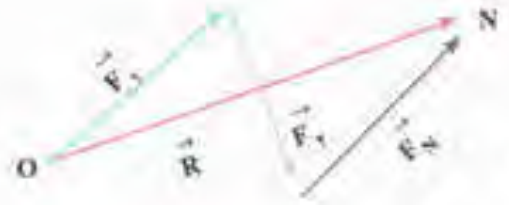
شکل ۲ـ۲ـ دو بردار هم‌سنگ

۴ـ۲ـ برایند دو یا چند بردار

برایند دو یا چند بردار، برداری است که به تنهایی، آثار آن دو یا چند بردار را داشته باشد. برای تعیین برایند چند بردار، از یک نقطه مانند O، هم‌سنگ بردار $\vec{F}_1$ و از انتهای بردارهم‌سنگ $\vec{F}_1$، هم‌سنگ بردار $\vec{F}_2$ را رسم می کنیم. این عمل را برای همه‌ی بردارها ادامه می‌دهیم تا جایی که نقطه‌ی N، انتهای هم‌سنگ بردار $\vec{F}_N$ (آخرین بردار موجود) به دست آید. اگر نقطه‌ی O را به نقطه‌ی N وصل کنیم، بردار $\vec{ON}$، برایند بردارهای $\vec{F}_N$ و... و $\vec{F}_2$ و $\vec{F}_1$ به دست می‌آید. پس می‌توان نوشت :

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \ldots + \vec{F}_N \qquad (۲ـ۳)$$





شکل ۳ـ۲

۵ـ۲ـ حاصل جمع بردارها

حاصل جمع بردارها را با روش هندسی (ترسیمی) یا روش تحلیلی (محاسبه‌ای) تعیین می کنند.

۱ـ۵ـ۲ـ روش هندسی: دو بردار $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ رامطابق شکل ۴ـ۲درنظرمی‌گیریم. هر دو

بردار از نقطه O شروع می‌شوند و جهت مثبت آنها با هم زاویه‌ی α می‌سازد.

برای تعیین برایند دو برابر $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ در روش هندسی، از انتهای هر یک به موازات دیگری خطی رسم می‌کنیم تا در نقطه‌ی C همدیگر را قطع کنند و یک متوازی‌الاضلاع به‌دست آید. بردار برایند $\vec{R}$، قطر متوازی‌الاضلاعی خواهد بود که بدین ترتیب ساخته می‌شود. ابتدای آن نقطه‌ی O (نقطه شروع هر دو بردار) و انتهایش نقطه‌ی C است. با توجه به شکل ۴ـ۲ می‌توان نوشت:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \qquad (۲ـ۴)$$

اندازه‌ی بردار $|\vec{R}| = \overline{OC}$ است و از رابطه‌ی زیر محاسبه می شود:

$$|\vec{R}| = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha} \qquad (۲ـ۵)$$

شکل ۴ـ۲

۲ـ۵ـ۲ـ روش تحلیلی: برای به دست آوردن حاصل جمع چند بردار به روش تحلیلی درصفحه محورهای مختصات، هم‌سنگ بردارها را مطابق شکل ۵ـ۲ رسم می‌کنیم. این بردارها با محورهای مختصات زاویه‌هایی می‌سازند. پس از تعیین این زاویه‌ها، هر یک از بردارها را روی محورهای افقی و عمودی تصویر می‌کنیم. سپس، جمع جبری تصاویر بردارها را نیز بر روی محور x به دست می‌آوریم و آن را با ΣF_x نشان می‌دهیم. جمع جبری تصاویر بردارها را نیز بر روی محور y به‌دست می‌آوریم و آن را با ΣF_y نشان می‌دهیم. بردار برایند از جمع دو بردار $\Sigma\vec{F}_x$ و $\Sigma\vec{F}_y$ به دست می‌آید و اندازه و جهت آن براساس روابط زیر تعیین می‌شود:

$$|\vec{R}| = \sqrt{(\Sigma F_x)^2 + (\Sigma F_y)^2} \qquad (۲ـ۶)$$

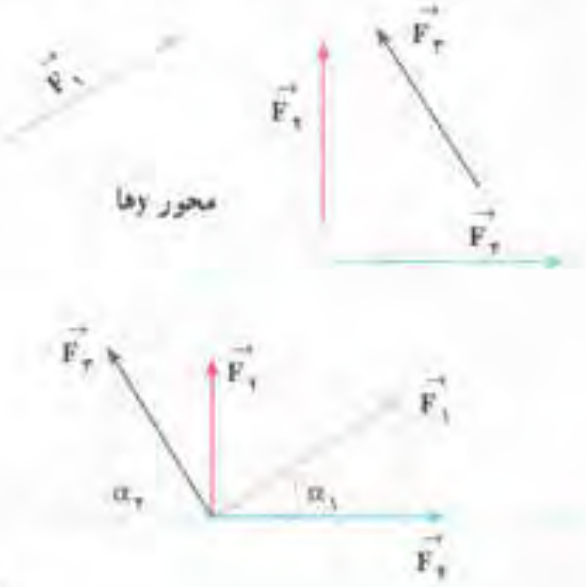
$$\varphi = \tan^{-1}\frac{\Sigma F_y}{\Sigma F_x} \qquad (۲ـ۷)$$

φ زاویه‌ای است که بردار برایند با محور x می‌سازد. برای شکل ۵ـ۲ بردار برایند را

می‌توان به صورت زیر محاسبه کرد :

$$\Sigma F_x = +|\vec{F}_1|\cos\alpha_1 + |\vec{F}_2|\cos 90 + |\vec{F}_3|\cos 0 - |\vec{F}_4|\cos\alpha_4 \qquad (۲\_۸)$$

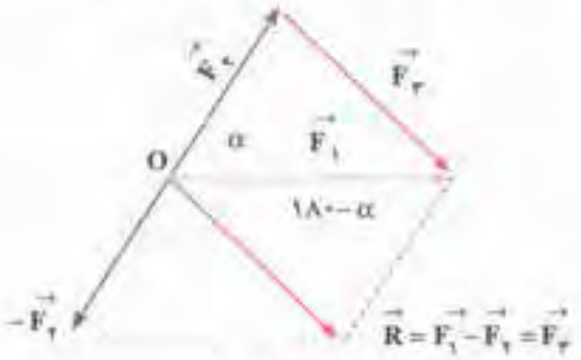
$$\Sigma F_y = +|\vec{F}_2|\sin(0) + |\vec{F}_1|\sin\alpha_1 + |\vec{F}_4|\sin 90 + |\vec{F}_3|\sin\alpha_4 \qquad (۲\_۹)$$



شکل۵ــ۲

۶ــ۲ــ تفاضل دو بردار

در شکل ۶ــ۲ بردار $\vec{F}_1$ ، برایند دو بردار $\vec{F}_2$ و $\vec{F}_3$ است.



شکل ۶ــ۲

$$\vec{F}_2+\vec{F}_3=\vec{F}_1 \qquad (۲\_۱۰)$$

اگر در رابطه‌ی ۱۰ــ۲ بردار $\vec{F}_2$ را به طرف دوم تساوی انتقال دهیم، خواهیم داشت :

$$\vec{F}_3=\vec{F}_1-\vec{F}_2 \qquad (۲\_۱۱)$$

رابطه‌ی۱۱ــ۲ بیان می‌کند که بردار $\vec{F}_3$ تفاضل دو بردار $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ است. برای تعیین تفاضل

دو بردار، از ابتدای بردار $\vec{F}_1$ ، منفی بردار $\vec{F}_2$ را رسم می‌کنیم. برایند دو بردار $\vec{F}_1$ و $-\vec{F}_2$ ، بردار تفاضل ($\vec{R}$) خواهد بود. این بردار هم‌سنگ بردار $\vec{F}_3$ تفاضل دو بردار $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ است. بردار $-\vec{F}_2$ با $\vec{F}_1$ زاویه‌ی $180^\circ-\alpha$ را می‌سازد بر اساس رابطه‌ی ۵ـ۲ می‌توان نوشت :

$$|\vec{R}|=|\vec{F}_3|=\sqrt{|\vec{F}_1^2|+|\vec{F}_2^2|+2|\vec{F}_1||\vec{F}_2|\cos(180^\circ-\alpha)} \qquad (2\text{ـ}12)$$

اگر در رابطه‌ی ۱۲ـ۲ به جای $\cos(180^\circ-\alpha)$ مقدار $-\cos\alpha$ را جایگزین کنیم، دامنه‌ی تفاضل دو بردار به قرار زیر محاسبه می‌شود :

$$|\vec{F}_3|=\sqrt{|\vec{F}_1^2|+|\vec{F}_2^2|-2|\vec{F}_1||\vec{F}_2|\cos\alpha} \qquad (2\text{ـ}13)$$

در رابطه‌ی (۱۳ـ ۲) α زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ است.

۷ـ۲ـتجزیه‌ی یک بردار به دو راستای معین

بردار $\vec{R}$ و دو راستای D و D' را مطابق شکل ۷ـ ۲ در نظر می‌گیریم. اگر بخواهیم بردار $\vec{R}$ را در راستای D و D' تجزیه کنیم، کافی است از انتهای آن دو خط به موازات راستاهای D و D' رسم کنیم. این خطوط راستای D را در نقطه‌ی B و راستای D' را در نقطه‌ی A قطع می‌کنند. بردار $\vec{F}_1=\vec{OA}$ را مؤلفه‌ی $\vec{R}$ در راستای D' و بردار $\vec{F}_2=\vec{OB}$ را مؤلفه‌ی بردار $\vec{R}$ در راستای D گویند. بدین ترتیب، بردار $\vec{R}$ به دو بردار $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ دو راستاهای D' و D تجزیه می‌شود.

شکل ۷ـ۲

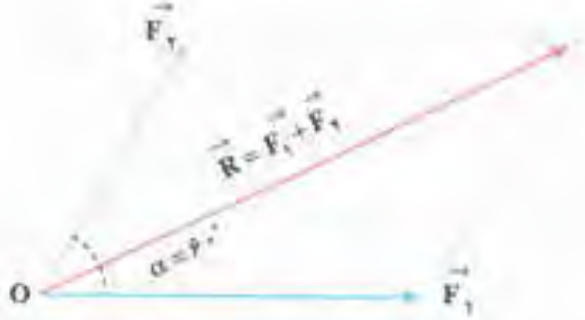
مثال ۱ـ۲: دو نیروی $\vec{F}_1=8N$ و $\vec{F}_2=6N$ با هم زاویه‌ی 60° می‌سازند. مجموع و تفاضل این دو بردار را به روش هندسی به دست آورید.

راه حل:

برایند دو نیروی $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ به روش هندسی مطابق شکل ۸ـ۲ به دست می‌آید.

$$|\vec{R}|=\sqrt{|\vec{F}_1^2|+|\vec{F}_2^2|+2|\vec{F}_1||\vec{F}_2|\cos\alpha}$$

$$|\vec{R}|=\sqrt{(8^2)+(6)^2+2(8)(6)\cos60^\circ}=12/16 \text{ نیوتن}$$



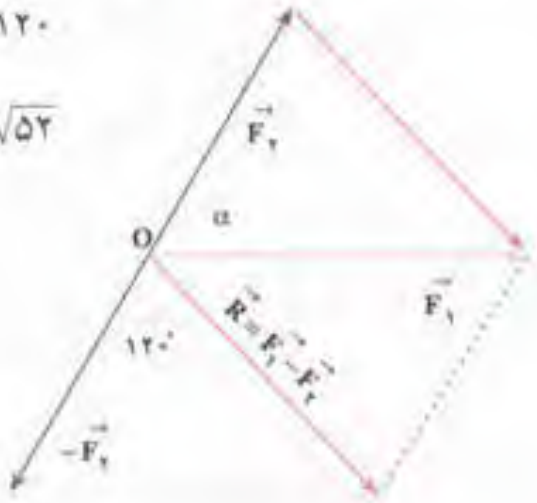
شکل ۸ــ۲ــ برایند مجموع $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$

برای تعیین تفاضل $\vec{F}_1-\vec{F}_2$، مطابق شکل ۹ــ۲، ابتدا منفی $\vec{F}_2$ را به دست می‌آوریم. با تعیین برایند $\vec{F}_1$ و $-\vec{F}_2$، تفاصل دوبردار $(\vec{F}_1-\vec{F}_2)$ حاصل می‌شود.

$$|\vec{R}|=\sqrt{|\vec{F}_1|^2+|\vec{F}_2|^2+2|\vec{F}_1||\vec{F}_2|\cos 120^\circ}$$

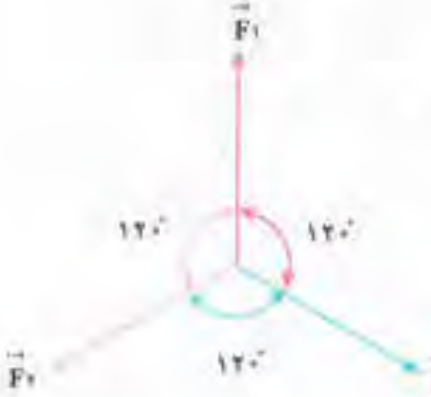
$$|\vec{R}|=\sqrt{(8)^2+(6)^2+2(8)(6)(-\frac{1}{2})}=\sqrt{52}$$

$$|\vec{R}|=|\vec{F}_1-\vec{F}_2|=7/21 \text{ نیوتن}$$



شکل ۹ــ۲ــ تفاضل دو بردار $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ از روش هندسی

مثال ۲ــ۲: سه بردار با دامنه‌ی یکسان ۲۲۰ ولتی، مطابق شکل ۱۰ ــ۲ با هم زاویه‌ی 120° می‌سازند. با روش تحلیلی، برایند این سه بردار را به دست آورید.



شکل ۱۰ ــ۲

راه حل:

برای سه بردار، محورهای مختصات را چنان عبور می‌دهیم که بردار $\vec{F}_1$ بر محور yها، مطابق شکل ۱۱ــ۲ منطبق شود. در این حالت، محور xها با بردار $\vec{F}_1$ زاویه‌ی 90° و با بردارهای $\vec{F}_3$ و $\vec{F}_2$ زاویه‌ی ۳۰ درجه تشکیل خواهد داد.

جمع جبری تصاویر بر روی محور xها برابر است با :

$$\Sigma F_x = |\vec{F}_1|\cos 90^\circ + |\vec{F}_2|\cos 30^\circ - |\vec{F}_3|\cos 30^\circ$$

$$\Sigma F_x = 220\cos 90^\circ + 220\times\frac{\sqrt{3}}{2} - 220\times\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

شکل ۱۱ـ۲

جمع جبری تصاویر بردارها بر روی محور yها برابر است با :

$$\Sigma F_y = |\vec{F}_1|\sin 90^\circ - |\vec{F}_2|\sin 30^\circ - |\vec{F}_3|\sin 30^\circ$$

$$\Sigma F_y = 220\times 1 - 220\times\frac{1}{2} - 220\times\frac{1}{2} = 0$$

بردار برایند برابر است با :

$$|\vec{R}| = \sqrt{(\Sigma F_x)^2 + (\Sigma F_y)^2} = \sqrt{0^2 + 0^2} = 0$$

۸ـ۲ـ ضرب بردارها

در ضرب بردارها، ضرب یک بردار در یک کمیت عددی (اسکالر) و ضرب نقطه‌ای (داخلی) را بررسی می‌کنیم.

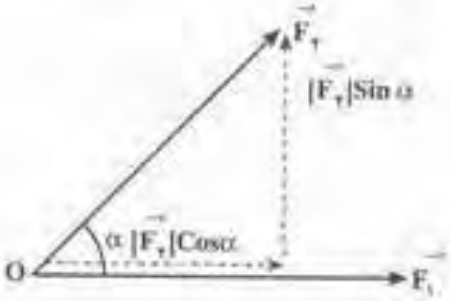
۱ـ۸ـ۲ـ ضرب یک بردار در یک کمیت عددی : ضرب کمیت عددی مانند K در یک بردار مانند $\vec{F}$ مطابق شکل ۱۲ـ۲، برداری را نتیجه می‌دهد که قدر مطلق آن K برابر قدر مطلق $\vec{F}$ است. اگر $K > 0$ باشد، بردار حاصل‌ضرب هم جهت با بردار $\vec{F}$ خواهد بود و اگر $K < 0$ باشد،

جهت بردار حاصل‌ضرب با جهت $\vec{F}$ ، ۱۸۰ درجه اختلاف خواهد داشت.

شکل ۱۲ــ۲

۲ــ۸ــ۲ــ ضرب داخلی (نقطه ای) دو بردار: دو بردار $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ را که با هم زاویه‌ی α می‌سازند، مطابق شکل ۱۳ــ۲ در نظر می‌گیریم. بردار $\vec{F}_2$ را به دو مؤلفه‌ی $\vec{F}_2\cos\alpha$ و $\vec{F}_2\sin\alpha$ که بر یک‌دیگر عمودند، تجزیه می‌کنیم. بنا به تعریف، حاصل‌ضرب داخلی دو بردار $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ که به صورت $A=\vec{F}_1.\vec{F}_2$ نشان داده می‌شود، یک کمیت عددی است. اندازه‌ی این کمیت عددی از رابطه‌ی $A=\vec{F}_1.\vec{F}_2=|\vec{F}_1||\vec{F}_2|\cos\alpha$ محاسبه می‌شود.

$$\vec{F}_1.\vec{F}_2=\vec{F}_2.\vec{F}_1=|\vec{F}_1||\vec{F}_2|\cos\alpha=|\vec{F}_2||\vec{F}_1|\cos\alpha \qquad (۲ــ۱۴)$$



شکل ۱۳ــ۲

کمیت‌های الکتریکی مانند توان وانرژی، کمیت‌های اسکالر یا عددی هستند. کمیت توان از حاصل‌ضرب عددی بردار ولتاژ $(\vec{V})$ و بردار جریان $(\vec{I})$ به دست می‌آید.

$$P=\vec{V}.\vec{I}=|\vec{V}|\,|\vec{I}|\cos\varphi \qquad (۲ــ۱۵)$$

در رابطه‌ی ۱۵ــ۲، φ زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{V}$ و $\vec{I}$ است و آن را **اختلاف فاز ولتاژ و جریان** می‌نامند.

در این کتاب با توجه به جهت مثلثاتی (خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت) اختلاف فاز بین جریان و ولتاژ را همیشه به صورت $\varphi=\theta_v-\theta_i$ (زاویه‌ی ولتاژ منهای زاویه‌ی جریان) منظور خواهیم کرد. اگر φ مثبت باشد، ــ یعنی در جهت مثلثاتی از $\vec{I}$ به $\vec{V}$ برسیم ــ جریان را پس فاز و اگر φ منفی باشد، ــ یعنی در جهت مثلثاتی از $\vec{V}$ به $\vec{I}$ برسیم ــ جریان را پیش فاز می‌نامند.

از آن‌جا که انرژی (کار) از حاصل‌ضرب توان در زمان به دست می‌آید ($W=P.t$) و چون هر دو کمیت توان و زمان کمیت اسکالر هستند، حاصل‌ضرب آن‌ها یعنی انرژی نیز کمیت اسکالر است.

مثال ۳ــ۲: بردارهای $\vec{F_1}=10$ واحد و $\vec{F_2}=6$ واحد با هم زاویه ۶۰ درجه می‌سازند. حاصل‌ضرب داخلی $\vec{F_1}.\vec{F_2}$ را معین کنید.

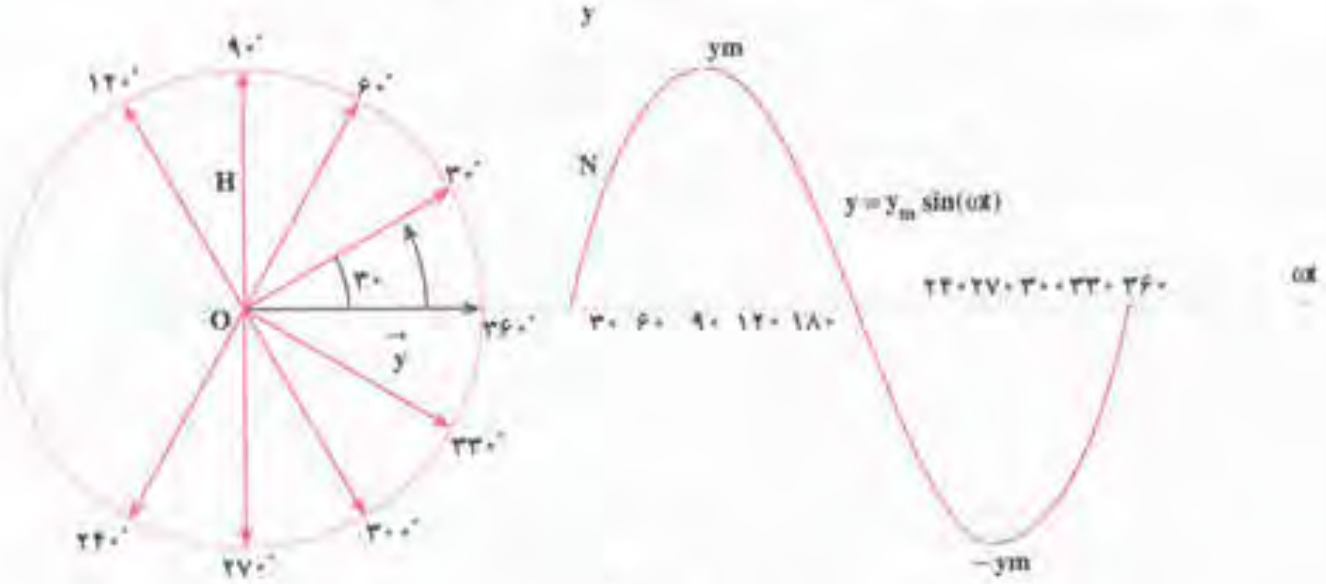
راه حل:

$$A=\vec{F_1}.\vec{F_2}=|\vec{F_1}||\vec{F_2}|\cos 60^\circ$$

$$A=10\times 6\times \cos 60^\circ=30 \quad \text{واحد}$$

۹ــ۲ــ نمایش برداری امواج متناوب سینوسی

موج سینوسی $y=y_m\sin(\omega t)$ را مطابق ۱۴ــ۲ در نظر می‌گیریم. در هر لحظه می‌توان دامنه‌ی این موج را از تصویر بردار چرخان $\vec{y}$ بر روی محور سینوس‌ها در دایره‌ی مثلثاتی معین کرد. بردار چرخان $\vec{y}$ با سرعت زاویه‌ای ω در جهت مثلثاتی دوران می‌کند.



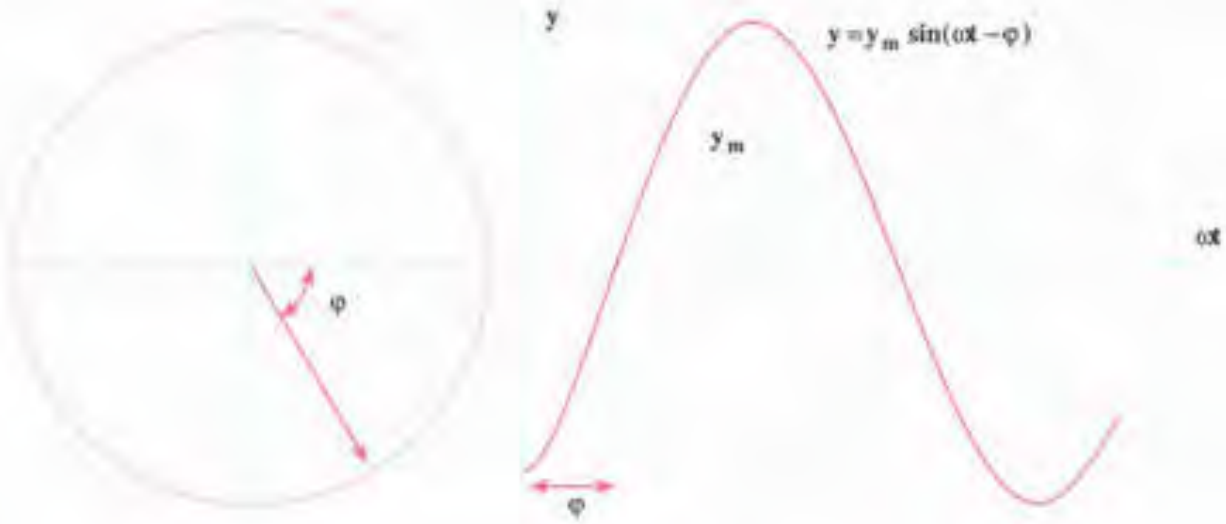
شکل ۱۴ــ۲

دامنه‌ی موج در $\omega t=30^\circ$، با نقطه N در روی منحنی سینوسی نشان داده شده است. این دامنه برابر پاره خط $\overline{OH}$ است. پاره‌خط $\overline{OH}$ تصویر بردار $\vec{y}$ در موقعیت $\vec{ON}$ است که نسبت به موقعیت صفر، ۳۰° در جهت مثلثاتی دوران کرده است.

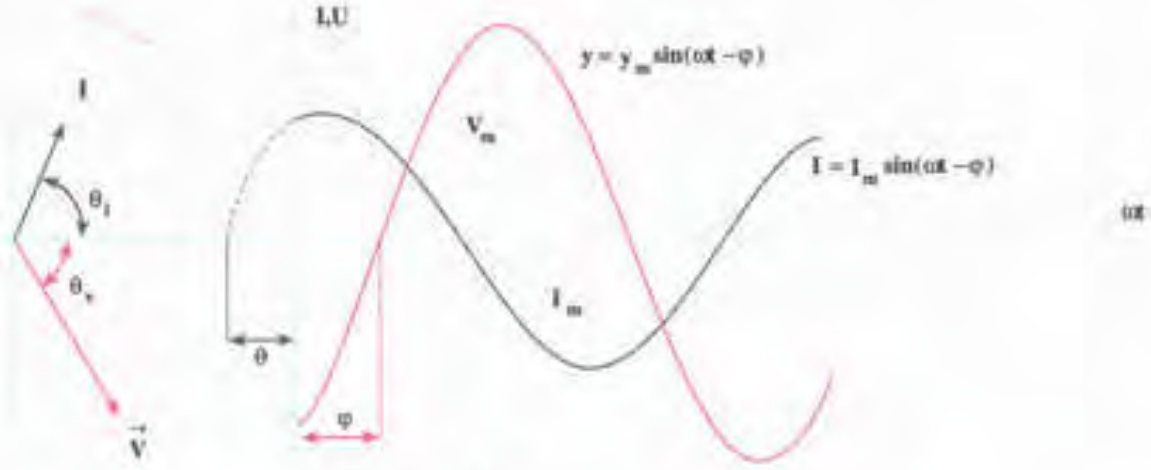
امواج سینوسی، ممکن است از مبدأ مختصات شروع نشوند. مثلاً موج شکل ۱۵ــ۲،

φ درجه عقب‌تر از مبدأ مختصات شروع می‌شود و به اصطلاح φ درجه پس فاز است. بردار این موج نسبت به محور xها (ωt)، φ درجه پس فاز رسم می‌شود.

در شکل ۱۶ـ۲ دو موج $v = V_m \sin(\omega t - \theta_V)$ و $i = I_m \sin(\omega t + \theta_i)$ نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌کنید، بردار $\vec{V}$ متناسب با دامنه‌ی V_m به اندازه‌ی $-\theta^\circ_v$ عقب‌تر از محور xها رسم شده است. بردار $\vec{I}$ متناسب با دامنه I_m، به اندازه‌ی $+\theta^\circ_i$ جلوتر رسم می شود. روشن است اختلاف فاز دو بردار $\vec{V}$ و $\vec{I}$، $\varphi = -\theta_V - \theta_i = -(\theta_V + \theta_i)$ خواهد بود. علامت φ منفی است، زیرا جریان پیش‌فاز است.



شکل ۱۵ـ۲



شکل ۱۶ـ۲

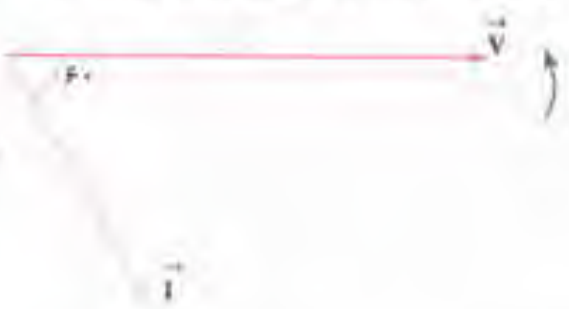
برای نشان دادن جریان و ولتاژ سینوسی به صورت برداری، در شکل‌های ۱۴ـ۲ تا ۱۶ ـ ۲، اندازه‌ی بردارها برابر دامنه‌ی ماکزیمم موج جریان و ولتاژ رسم شده است. از آن‌جا که در محاسبه‌ها معمولاً مقادیر مؤثر ولتاژ و جریان به‌کار می‌رود، می‌توان اندازه‌ی این بردارها را برابر با مقدار دامنه‌ی مؤثر امواج رسم کرد.

مثال ۴ـ۲: معادله‌ی زمانی دو کمیت جریان و ولتاژ به صورت $i = ۲۰\sqrt{۲}\sin(۵۰۰t - ۶۰^\circ)$ و $v = ۲۰۰\sqrt{۲}\sin(۵۰۰t)$ است. پس از رسم بردارهای فاز $\vec{I}$ و $\vec{V}$، حاصل‌ضرب عددی $P = \vec{V}.\vec{I}$ را معین کنید.

راه حل: در رسم بردارهای فاز، لازم است دامنه‌ی مؤثر و زاویه‌ی فاز بردارها تعیین گردد و در محورهای مختصات با توجه به پس فاز یا پیش فاز بودن آن‌ها رسم شود. بردار جریان دارای مقدار مؤثر $|\vec{I}| = \frac{۲۰\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}$ و بردار ولتاژ دارای مقدار مؤثر $|\vec{V}| = \frac{۲۰۰\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}$ است. زاویه‌ی فاز بردار جریان $\theta_i = -۶۰^\circ$ و زاویه‌ی فاز ولتاژ $\theta_v = ۰$ است. بنابراین، اختلاف فاز بین بردار جریان و ولتاژ برابر $\varphi = \theta_v - \theta_i$ خواهد بود و مقدار آن $\varphi = ۰ - (-۶۰) = ۶۰$ درجه محاسبه می‌شود.

$$P = \vec{V}.\vec{I} = |V| \times |I| \cos\alpha$$

$$P = \frac{۲۰۰\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} \times \frac{۲۰\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} \cos ۶۰^\circ = ۲۰۰۰ W$$



۱۰ـ۲ـ توان الکتریکی

آهنگ جذب یا تولید انرژی الکتریکی را **توان الکتریکی** می‌گویند. اگر آهنگ جذب یا تولید انرژی الکتریکی یک دستگاه ثابت باشد، توان دستگاه، مقدار کار انجام یافته در واحد زمان است و از رابطه‌ی $P = \frac{W}{t}$ تعیین می‌شود. واحد کار، ژول و واحد زمان، ثانیه است. یک ژول بر ثانیه را **وات** (واحد توان) می‌گویند. هزار وات، کیلووات (KW) و یک میلیون وات، مگاوات (MW) نامیده می‌شود.

$۱KW = ۱۰۰۰W$ (یک کیلو وات)

$۱MW = ۱۰^۶W$ (یک مگا وات)

توان الکتریکی از حاصل‌ضرب عددی بردار ولتاژ و جریان در هر لحظه به‌دست می‌آید.

(آمپر) I. (ولت) P=V (وات)

در جریان متناوب (AC) توان الکتریکی در چندین مفهوم بررسی می‌شود. این مفاهیم عبارت‌اند از:

توان لحظه‌ای، توان ظاهری، توان مؤثر[1]، توان غیر مؤثر[2].

۱ـ۱۰ـ۲ـ توان لحظه‌ای: حاصل‌ضرب لحظه‌ای جریان و ولتاژ را **توان لحظه‌ای** می‌گویند و آن را با $P_{(t)}$ نشان می‌دهند. اگر جریان لحظه‌ای را به i و ولتاژ لحظه‌ای را به v نشان دهیم، توان لحظه‌ای به صورت $P_{(t)} = v.i$ بیان خواهد شد. اگر در جریان متناوب ولتاژ را مبنا قرار دهیم، ولتاژ لحظه‌ای به شکل $V = V_m \sin \omega t$ و جریان لحظه‌ای به صورت $i = I_m \sin(\omega t + \theta_i)$ بیان می‌شود. φ زاویه اختلاف فاز ولتاژ و جریان برابر با $\varphi = \theta_v - \theta_i = 0 - \theta_i = -\theta_i$ می‌شود که علامت آن منفی است؛ یعنی، جریان نسبت به ولتاژ پیش‌فاز است. بنابراین:

$$P_{(t)} = v.i = V_m \sin \omega t \times I_m \sin(\omega t + \varphi) \quad \text{(توان لحظه‌ای)} \qquad (۲ـ۱۶)$$

با توجه به این‌که $\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$ است، رابطه‌ی ۱۶ـ۲ را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$P_{(t)} = \frac{1}{2} V_m I_m [\cos\varphi - \cos(2\omega t + \varphi)] \qquad (۲ـ۱۷)$$

رابطه‌ی ۱۷ ـ۲ بیان می‌کند که فرکانس تغییرات توان دو برابر فرکانس تغییرات ولتاژ و جریان است. تغییرات ولتاژ، جریان و توان یک جریان متناوب را در شکل ۱۷ـ ۲ مشاهده می‌کنید.

۲ـ۱۰ـ۲ـ توان مؤثر (توان حقیقی): رابطه‌ی ۱۷ـ۲ توان لحظه‌ای را به صورت $P_{(t)} = \frac{1}{2} V_m I_m \cos\varphi - \frac{1}{2} V_m I_m \cos(2\omega t + \varphi)$ بیان می‌کند. در یک سیکل کامل، مقدار متوسط $\frac{1}{2} V_m I_m \cos(2\omega t + \varphi)$ صفر است؛ زیرا دارای دو نیم سیکل مثبت و منفی است که از نظر مقدار با هم برابرند. بنابراین، در یک سیکل کامل توان متوسط به صورت رابطه‌ی ۱۸ـ۲ بیان خواهد شد.

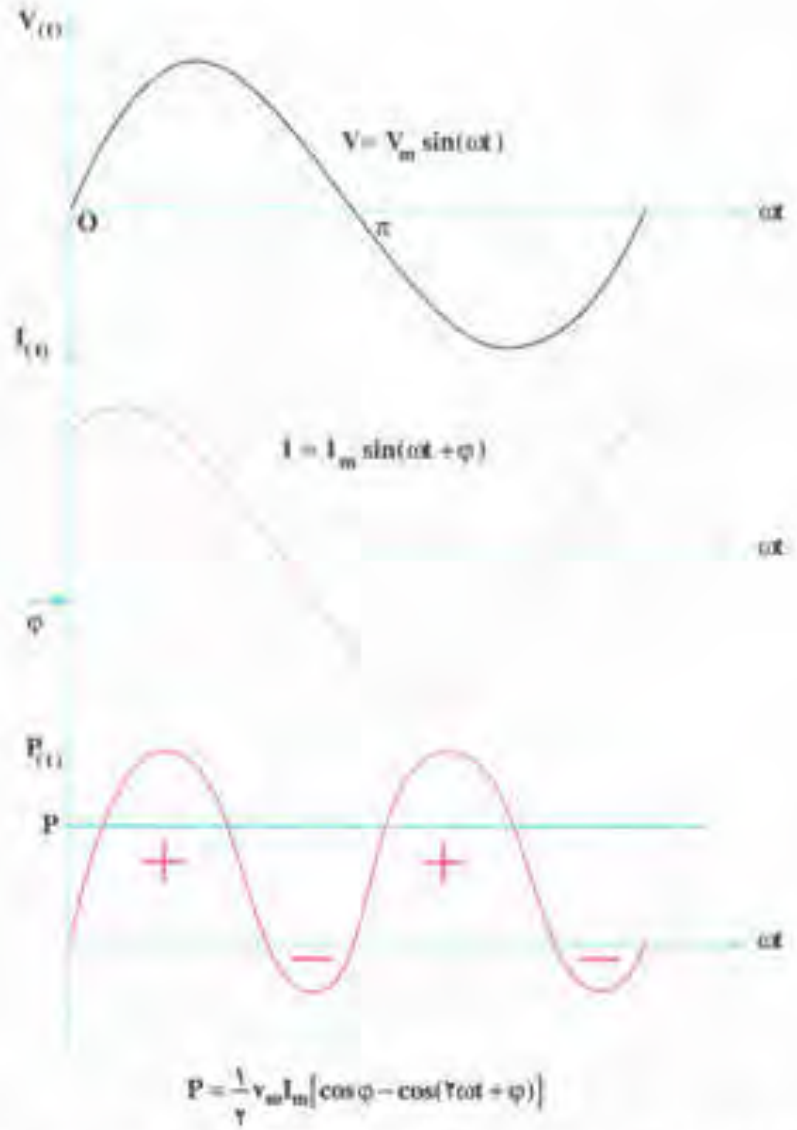
$$P = \frac{1}{2} V_m I_m \cos\varphi \qquad (۲ـ۱۸)$$

اگر در رابطه‌ی ۱۸ـ۲ مقادیر $V_m = \sqrt{2} V_e$ و $I_m = \sqrt{2} I_e$ را جایگزین کنیم، خواهیم‌داشت:

$$P_e = V_e I_e \cos\varphi \qquad (۲ـ۱۹)$$

۱ـ توان مؤثر را توان اکتیو، واته و مفید نیز می‌گویند و آن را با علایم اختصاری P_e، P_a، P_w و P نشان می‌دهند.

۲ـ توان غیرمؤثر را توان راکتیو، دواته، غیرمفید نیز می‌گویند و آن را با علایم اختصاری P_q و P_r و Q نشان می‌دهند.



$$P = \frac{1}{2} V_m I_m [\cos\varphi - \cos(2\omega t + \varphi)]$$

شکل ۱۷ــ ۲ ــ منحنی تابع تغییرات ولتاژ، جریان و توان یک مدار جریان متناوب

P_e را **توان مؤثر** یا توان مفید می‌گویند. در مدارهای الکتریکی این توان، کار مؤثر را انجام می‌دهد. به عبارت دیگر، تبدیل انرژی الکتریکی به انرژی‌های دیگر توسط توان الکتریکی قابل توجیه است. ضمناً در مقاومت‌های اهمی، این توان به صورت انرژی حرارتی ظاهر می‌شود. در رابطه‌ی ۱۹ــ۲، $\cos\varphi$ را **ضریب توان** می‌گویند. هر چه ضریب توان به یک نزدیک‌تر شود، اختلاف فاز بین جریان و ولتاژ (φ) به صفر نزدیک می‌شود و توان مؤثر افزایش می‌یابد.

۳ــ۱۰ــ۲ــ توان غیر مؤثر: در عناصر غیر فعال نظیر مقاومت‌های سلفی و خازنی، توان غیر مؤثری ظاهر می‌شود که نمی‌توان آن را به کار مفید تبدیل کرد. این توان به صورت موج سینوسی بین مصرف‌کننده و شبکه رفت و برگشت می‌کند و کاری انجام نمی‌دهد. در شبکه‌های الکتریکی به‌هنگام بهره‌گیری از خواص سلفی و خازنی در ایجاد میدان‌های مغناطیسی و الکتریکی، توان

غیر مؤثر به طور ناخواسته در شبکه ظاهر می‌شود. این امر موجب می شود که مولدها نتوانند در جریان نامی توان مفید کامل به شبکه تحویل دهند. توان غیر مؤثر با رابطه‌ی ۲۰ـ۲ بیان می‌شود :

$$P_d = \pm V_e I_e \sin\varphi \qquad (۲ـ۲۰)$$

چون در خازن‌ها جریان پیش‌فاز است، $\varphi = \theta_v - \theta_i$ منفی می‌شود و توان P_d را با علامت منفی خواهیم داشت. از آن‌جا که در مقاومت‌های سلفی $\varphi = \theta_v - \theta_i > 0$ است، توان غیر مؤثر با علامت مثبت خواهد شد.

واحد توان غیر مؤثر در سیستم SI، ولت آمپر راکتیو است و با نماد V.A.R نشان داده می‌شود. هزار ولت آمپر راکتیو را کیلو ولت آمپر راکتیو می‌گویند و با علامت اختصاری KV.A.R نشان می‌دهند. یک مگا ولت آمپر راکتیو (MV.A.R) برابر یک میلیون ولت آمپر راکتیو است.

۴ـ۱۰ـ۲ـ توان ظاهری: حاصل‌ضرب ولتاژ و جریان مؤثر را **توان ظاهری** می‌گویند و آن را با علامت اختصاری P_s یا S نشان می‌دهند. در سیستم SI، واحد توان ظاهری ولت آمپر (V.A) است. هزار برابر V.A را کیلو ولت آمپر می‌گویند و با علامت اختصاری K.V.A نشان می‌دهند. یک میلیون برابر V.A را مگا ولت آمپر می‌نامند و علامت اختصاری مشخصه‌ی آن M.V.A است. توان ظاهری از رابطه‌ی ۲۱ـ۲ به دست می‌آید.

$$P_s = V_e I_e \qquad (۲ـ۲۱)$$

۵ـ۱۰ـ۲ـ ارتباط توان حقیقی و غیر مفید با توان ظاهری: بر اساس روابط ۱۹ـ۲ و ۲۰ـ۲ می‌توان نوشت :

$$P_e = V_e I_e \cos\varphi$$

اگر رابطه‌ی بالا را مجذور کنیم، خواهیم داشت :

$$P_e^2 = V_e^2 I_e^2 \cos^2\varphi \qquad (۲ـ۲۲)$$

هم‌چنین :

$$P_d = V_e I_e \sin\varphi$$

$$P_d^2 = V_e^2 I_e^2 \sin^2\varphi \qquad (۲ـ۲۳)$$

دو رابطه‌ی ۲۲ـ۲ و ۲۳ـ۲ را جمع می‌کنیم. با توجه به این که $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ است، خواهیم داشت :

$$P_e^2 + P_d^2 = V_e^2 I_e^2 \cos^2\varphi + V_e^2 I_e^2 \sin^2\varphi$$

$$P_e^2 + P_d^2 = V_e^2 I_e^2 (\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)$$

بنابراین:

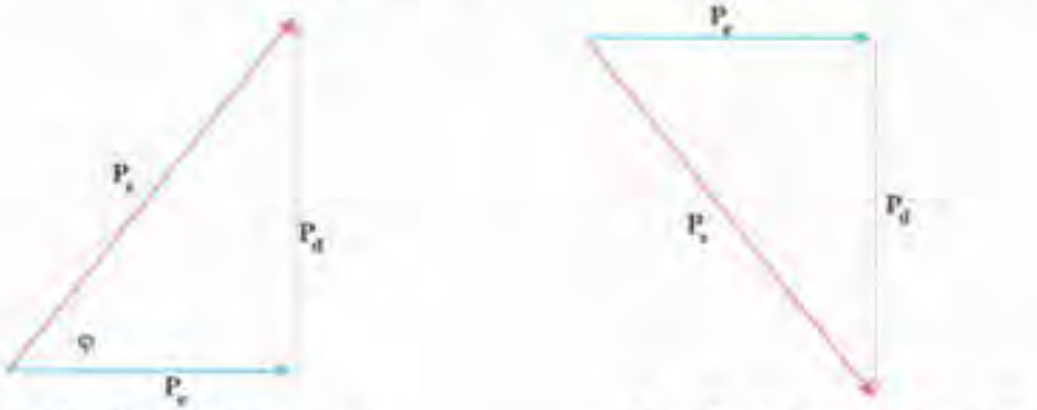
$$P_e^2 + P_d^2 = V_e^2 I_e^2$$

با توجه به رابطه‌ی ۲۱ـ۲، $V_e I_e$ توان ظاهری است؛ بنابراین:

$$P_e^2 + P_d^2 = P_s^2$$

$$P_s = \sqrt{P_e^2 + P_d^2} \qquad (۲ـ۲۴)$$

۶ـ۱۰ـ۲ـ مثلث توان‌ها: با توجه به رابطه‌ی ۲۴ـ۲، می‌توان گفت P_s توان ظاهری وتر مثلث قائم الزاویه‌ای است که دو ضلع قائم آن توان‌های مؤثر و غیر مؤثر هستند. در رسم مثلث توان‌ها، توان مؤثر P_e را در راستای محور xها رسم می‌کنند. از آن‌جا که در مقاومت خازنی و مقاومت سلفی خالص، جریان‌ها از ولتاژ به ترتیب ۹۰ درجه پیش‌فاز و ۹۰ درجه پس فاز است، اختلاف فاز φ در مقاومت خازنی منفی و مقاومت سلفی مثبت خواهد بود. به همین علت، توان راکتیو مربوط به مقاومت سلفی مثبت و بالای محور yها و توان راکتیو مربوط به خازن منفی پایین محور yها رسم می‌شوند. توان‌های راکتیو در مقاومت سلفی و خازنی به علت آن‌که ۱۸۰ درجه با هم اختلاف فاز دارند، در جهت خلاف یک‌دیگر بر شبکه تأثیر خواهند گذاشت. اگر شبکه از چندین شاخه تشکیل شده باشد، می‌توانیم، توان شاخه‌ها را به دنبال هم رسم کنیم و توان مؤثر و غیر مؤثر کل شبکه را به دست آوریم و آن‌گاه توان ظاهری را معلوم کنیم.



الف: مثلث توان‌ها با توان راکتیو منفی — ب: مثلث توان‌ها با توان راکتیو مثبت

شکل ۱۸ـ ۲ـ مثلث توان‌ها

در مثلث توان‌ها می‌توان نوشت:

$$P_e = P_s \cos\varphi \quad , \quad P_d = P_s \sin\varphi$$
$$\Rightarrow \quad P_d = P_e \tan\varphi$$

مثال ۵ـ۲ـ در یک مدار الکتریکی معادله‌ی ولتاژ $v = ۲۰۰\sin(\omega t + ۸۰^\circ)$ و معادله‌ی

جریان $i = 5\sin(\omega t + 20^\circ)$ است. توان‌های حقیقی، غیر مؤثر و ظاهری مدار را به دست آورید و مثلث توان‌ها را رسم کنید.

راه حل:

$$V_m = 200V \Rightarrow V_e = \frac{V_m}{\sqrt{2}} = \frac{200}{\sqrt{2}} = 100\sqrt{2}V$$

$$I_m = 5A \Rightarrow I_e = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} = 2/5\sqrt{2}A$$

$$\varphi = \theta_v - \theta_i$$

اختلاف فاز بین جریان و ولتاژ از تفاوت فازهای اولیه به دست می‌آید.

$$\varphi = 80 - 20 = 60^\circ$$

$$P_e = V_e I_e \cos\varphi = 100\sqrt{2} \times 2/5\sqrt{2} \cos 60^\circ = 250W$$

$$P_d = V_e I_e \sin\varphi = 100\sqrt{2} \times 2/5\sqrt{2} \sin 60^\circ = 433 \ V.A.R$$

$$P_s = \sqrt{P_e^2 + P_d^2}$$

$$P_s = \sqrt{250^2 + 433^2} = 500V.A$$

شکل ۱۹ـ۲ـ مثلث توان‌ها

مثال۶ـ۲ـ یک شبکه‌ی الکتریکی دارای مصرف‌کننده‌هایی با مشخصات زیر است:

۱ـ مصرف‌کننده‌ی شماره‌ی۱ $P_s = 300V.A$, $\varphi = 30^\circ$

۲ـ مصرف‌کننده‌ی شماره‌ی۲ $P_e = 200W$, $\varphi = -60^\circ$

۳ـ مصرف‌کننده‌ی شماره‌ی۳ $P_d = 400V.A.R$, $P_s = 500V.A$

مثلث توان‌های مصرف‌کننده‌ها را به دنبال هم رسم کنید و توان مؤثر، راکتیو و ظاهری شبکه را به دست آورید.

راه حل:

$$P_{s_1} = 300V.A \quad , \quad \varphi_1 = 30^\circ$$

$$P_{e_1} = P_{s_1} \cos\varphi_1 = 300\cos 30 = 150\sqrt{3} = 259/8 \ W$$

$$P_{d_1} = P_{s_1} \sin\varphi_1 = ۳۰۰ \sin ۳۰^\circ = ۱۵۰ \ \text{V.A.R}$$

$$P_{e_2} = ۲۰۰ \ \text{W} \quad , \quad \varphi_2 = -۶۰^\circ$$

$$P_{s_2} = \frac{P_{e_2}}{\cos\varphi_2} = \frac{۲۰۰}{\cos(-۶۰)} = ۴۰۰ \ \text{V.A}$$

$$P_{d_2} = P_e \tan\varphi_2 = ۲۰۰ \tan(-۶۰) = -۲۰۰\sqrt{۳} = -۳۴۶/۴ \ \text{V.A.R}$$

$$P_{d_2} = ۴۰۰ \ \text{V.A.R} \quad , \quad P_{s_2} = ۵۰۰ \ \text{V.A}$$

$$P_{s_2}^۲ = P_{e_2}^۲ + P_{d_2}^۲$$

$$۵۰۰^۲ = P_{e_2}^۲ + ۴۰۰^۲ \Rightarrow P_{e_2}^۲ = ۹۰۰۰۰$$

$$P_{e_2} = ۳۰۰ \ \text{W}$$

شکل ۲۰ـ۲

با توجه به شکل ۲۰ـ ۲ می‌توان نوشت :

$$P_e = P_{e_1} + P_{e_2} + P_{e_2} = ۲۵۹/۸ + ۲۰۰ + ۳۰۰ = ۷۵۹/۸ \ \text{W}$$

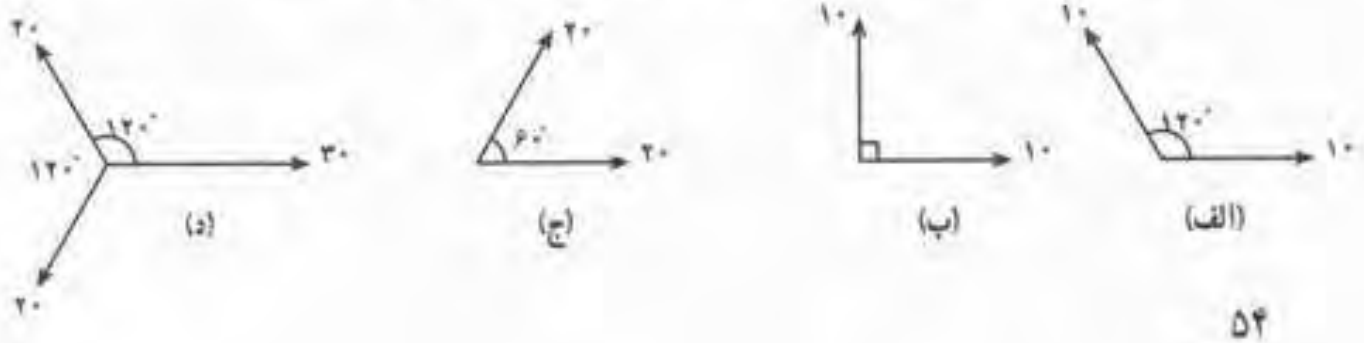
$$P_d = P_{d_1} + P_{d_2} + P_{d_2} = ۱۵۰ - ۳۴۶/۴ + ۴۰۰ = ۲۰۳/۶ \ \text{V.A}$$

$$P_s = \sqrt{P_e^۲ + P_d^۲} = \sqrt{۷۵۹/۸^۲ + ۲۰۳/۶^۲}$$

$$P_s = ۷۸۶/۶ \ \text{V.A}$$

۱۱ ـ۲ـ تمرین‌ها

۱ـ برایند بردارهای اشکال زیر را به دو روش تحلیلی و هندسی به‌دست آورید.



۲ــ دو بردار $\vec{F}_1 = ۱۰$ و $\vec{F}_2 = ۲۰$ مفروض است. اگر زاویه‌ی بین دو بردار $\alpha = ۶۰^\circ$ باشد، مطلوب است:

الف ــ $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$ ب ــ $\vec{F}_1 - \vec{F}_2$ پ ــ $\vec{F}_1 . \vec{F}_2$ ت ــ $\vec{F}_1 . 2\vec{F}_2$

۳ــ دو بردار $\vec{F}_1 = ۳$ و $\vec{F}_2 = ۴$ در چه شرایطی برایندهای $\vec{R} = ۷$ و $\vec{R} = ۱$ و $\vec{R} = ۵$ خواهند داشت؟

۴ــ زاویه‌ی بین دو بردار با دامنه‌ی مساوی برابر α° است. زاویه‌ی بین برایند و تفاضل آن‌ها را به‌دست آورید.

۵ــ در یک مدار الکتریکی، معادله‌ی ولتاژ و جریان به ترتیب $V = ۵۰\sqrt{۲}\sin ۲۵۰۰t$ و $I = ۱۰\sqrt{۲}\sin(۲۵۰۰t + ۳۰)$ است. مطلوب است:

الف ــ رسم دیاگرام‌برداری ب ــ محاسبه‌ی توان‌های حقیقی، غیرمؤثر و ظاهری مدار.

۶ــ در یک شبکه‌ی الکتریکی دو مصرف‌کننده با مشخصات زیر حضور دارند:

بار شماره‌ی یک: پس فاز $\cos\varphi = ۰/۸$ ، $P_1 = ۵KW$

بار شماره‌ی دو: پیش‌فاز $P_2 = ۲\sqrt{۳}KW$ ، $P_{d2} = ۲K.V.A.R$

مطلوب است:

الف ــ رسم مثلث توان هریک.

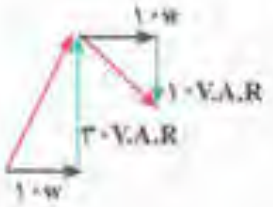
ب ــ محاسبه‌ی ضریب قدرت کل شبکه

۷ــ دو شبکه‌ی الکتریکی با مشخصات زیر مفروض است. ضریب قدرت این دو شبکه روی هم چه‌قدر است؟

بار شماره‌ی یک: $P_1 = ۱۰۰W$ ، $Ps_1 = ۱۰۰\sqrt{۲}V.A$ پس‌فاز.

بار شماره‌ی دو: $P_{d2} = ۴۰V.A.R$ ، $Ps_2 = ۴۰\sqrt{۲}V.A$ پیش‌فاز.

۸ــ دیاگرام توان یک مدار الکتریکی جریان متناوب مطابق شکل روبه‌روست. ضریب توان کل شبکه چه‌قدر است؟



۹ــ یک شبکه‌ی الکتریکی بار ۸۰KW را با ضریب توان $\cos\varphi = ۰/۸$ پس‌فاز تغذیه می‌کند. بار نامعلومی وارد شبکه می‌شود. در این حالت، توان ظاهری شبکه برابر ۲۰۰K.V.A با ضریب توان ۰/۶ پیش‌فاز است. مشخصات جدید شبکه را معلوم کنید.

فصل سوم

مدارهای R - L جریان متناوب

هدف‌های رفتاری: در پایان این فصل از دانش‌آموز انتظار می‌رود:

۱ـ مقادیر جریان، ولتاژ، اختلاف فاز، مقاومت ظاهری، ضریب‌توان، توان‌های مؤثر، غیرمؤثر، ظاهری را در مدارهای R - L (سری وموازی) محاسبه کند.

۲ـ دیاگرام برداری ولتاژها را در مدارهای R - L سری و جریان‌ها را در مدارهای R - L موازی رسم کند.

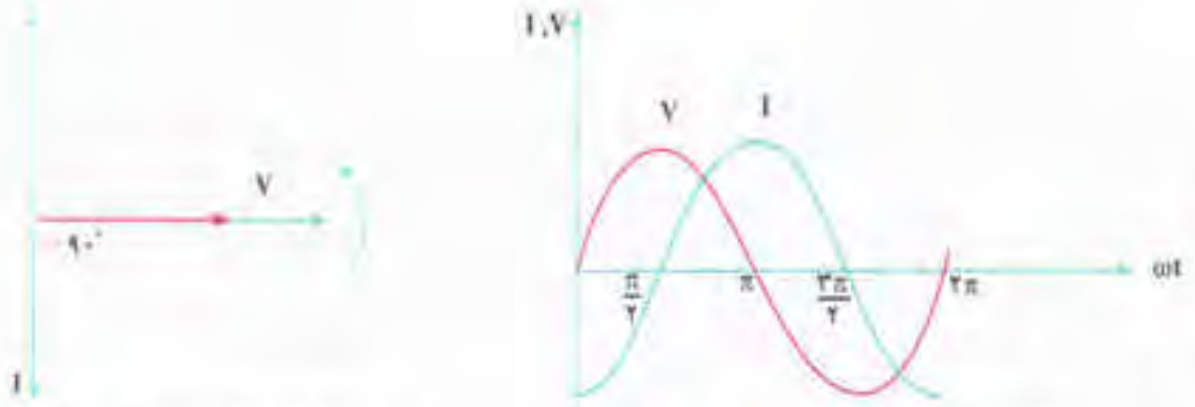
۳ـ ضریب کیفیت مدارهای R - L سری و موازی را محاسبه کند.

۴ـ اثر تغییرات فرکانس را بر مقاومت ظاهری، جریان، اختلاف فاز و ضریب قدرت را در مدارهای R - L سری و موازی تشریح کند.

۵ـ منحنی‌های تغییرات فرکانس را بر روی پارامترهای امپدانس، زاویه فاز و جریان را در مدارهای R - L سری و موازی از طریق نقطه‌یابی رسم کند.

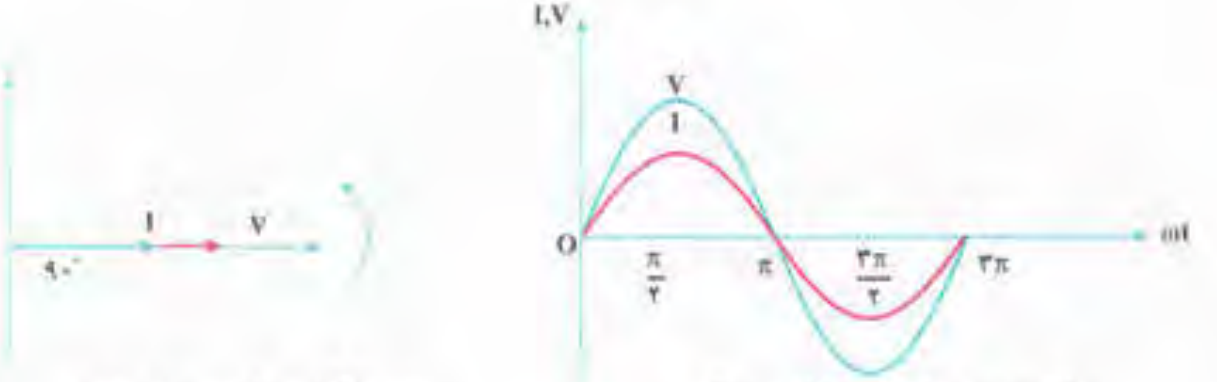
۱ـ۳ـ مقدمه

در سال گذشته، رفتار مقاومت اهمی خالص و سلف خالص را در جریان متناوب خواندیم و آموختیم که جریان و ولتاژ دو سر مقاومت اهمی، هم‌فاز هستند؛ یعنی، منحنی تغییرات جریان و ولتاژها با هم به حداکثر یا حداقل می‌رسد. در مقاومت سلف خالص، جریان از ولتاژ دو سر آن، ۹۰ درجه‌ی الکتریکی عقب‌تر است. با توجه به منحنی تغییرات جریان و ولتاژ در عناصر اهمی و سلفی خالص، دیاگرام برداری جریان و ولتاژ مطابق شکل‌های ۱ـ۳ و ۲ـ۳ خواهد بود.



الف : منحنی تغییرات جریان و ولتاژ ب : دیاگرام برداری جریان و ولتاژ

شکل ۱ــ۳ــ منحنی تغییرات و دیاگرام برداری جریان و ولتاژ در سلف خالص

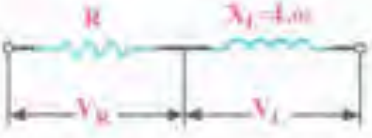


الف :منحنی تغییرات ولتاژ و جریان ب : دیاگرام برداری ولتاژ و جریان

شکل ۲ــ۳ــ منحنی تغییرات جریان و ولتاژ در مقاومت اهمی خالص و دیاگرام برداری آن‌ها

۲ــ۳ــ مدار معادل الکتریکی یک سلف حقیقی

وجود مدارهای سلفی در موتورها، مولدها، ترانسفورماتورها و دستگاه‌های اندازه‌گیری الکتریکی ایجاب می‌کند تا این عنصر را از منظر واقعی آن مطالعه کنیم. از آن‌جا که یک سیم‌پیچ (بوبین) از هادی الکتریکی با یک طول معین ساخته می‌شود و با توجه به رابطه‌ی $R = \rho \frac{l}{A}$ ، سلف حقیقی علاوه بر راکتانس از مقاومت اهمی نیز برخوردار است، رفتار سلف حقیقی با رفتار مقاومت‌های سلف خالص (ایده‌آل) در مدارهای الکتریکی متفاوت خواهد بود. از این‌رو، یک سلف رامطابق شکل ۳ــ۳ به‌صورت یک راکتانس القایی و یک مقاومت اهمی سری با آن مدل می‌کنند. راکتانس القایی را با X_L نشان می‌دهند که، با توجه به رابطه‌ی $X_L = 2\pi fL$ به فرکانس شبکه بستگی دارد. در جریان DC به‌علت $f = 0$، راکتانس سلف، صفر است و سلف فقط خاصیت اهمی خواهد داشت.



شکل ۳ــ۳ــ مدل یک مقاومت سلفی حقیقی

مقاومت یک سیم‌پیچ در جریان DC کم‌تر از مقاومت آن در جریان متناوب است. مقاومتی که یک سلف واقعی در جریان متناوب نشان می‌دهد، **امپدانس**[1] نامیده می‌شود، و آن‌را با Z نشان می‌دهند. Z را **مقاومت ظاهری** نیز می‌گویند که واحد آن اهم است.

مقاومت ظاهری عناصر غیرفعال الکتریکی در جریان متناوب ازرابطه‌ی عمومی ۱ـ۳ محاسبه می‌شود .

$$Z = \frac{V_e}{I_e} = \frac{V_m}{I_m} \qquad (۳\_۱)$$

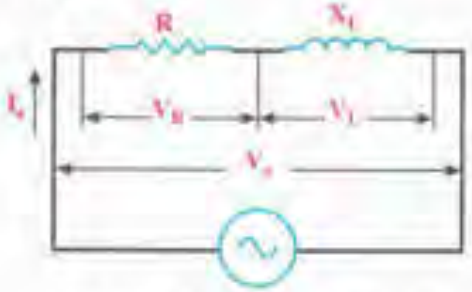
$$V_e = ZI_e \text{ و } V_m = ZI_m \qquad (۳\_۲)$$

۳ـ۳ـ محاسبه‌ی امپدانس مدار R - L سری

مدار ساده‌ی یک مقاومت اهمی و یک مقاومت سلفی با اتصال سری در شکل ۴ـ۳ نشان داده شده است. این مدار می‌تواند معادل مدار یک سیم‌پیچ یا یک مقاومت القایی حقیقی باشد. در این مدار سری جریان I_e ، از مقاومت اهمی R و راکتانس القایی X_L عبور می‌کند. بنابراین، ولتاژهای دو سر مقاومت اهمی و مقاومت سلفی مطابق روابط ۳ـ۳ و ۴ـ۳ خواهند بود .

$$V_R = R.I_e \qquad (۳\_۳)$$

$$V_e = X_L.I_e = 2\pi fL.I_e = L\omega I_e \qquad (۳\_۴)$$



شکل ۴ـ۳ـ مدار الکتریکی R - L سری

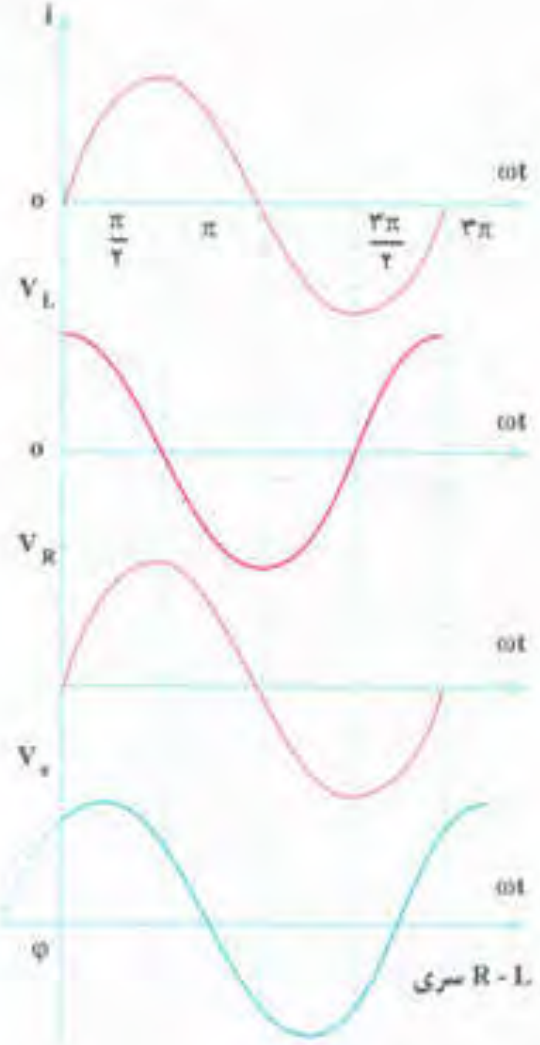
ولتاژ V_R با جریان I_e هم فاز است ولی ولتاژ V_L از جریان I_e ، ۹۰ درجه الکتریکی جلوتر خواهد بود. V_R و V_L هم فاز نیستند ؛بنابراین، برای محاسبه‌ی V_e از جمع برداری $\vec{V_e} = \vec{V_R} + \vec{V_L}$ استفاده می‌شود. از آن‌جا که جریان در همه‌ی عناصر مدارهای سری یکسان است، برای محاسبه‌ها و تحلیل مدار، جریان را مبنا قرار می‌دهند و بقیه‌ی مشخصات مدار را براساس جریان تعیین می‌کنند. اگر معادله‌ی زمانی جریان را به‌صورت $i = I_m \sin \omega t$ فرض کنیم، معادله‌های زمانی ولتاژ V_R و V_L از روابط ۵ـ۳ و ۶ـ۳ تعیین خواهند شد .

۱ـ Impedance

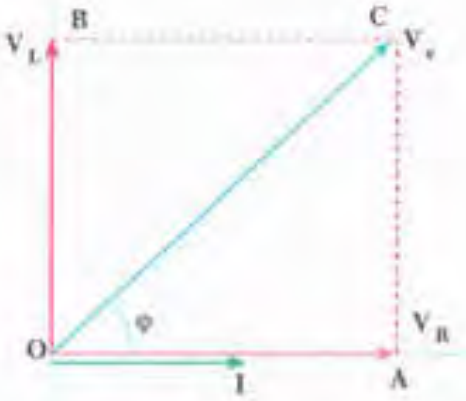
$$v_R = R.I_m \sin \omega t \qquad (۳\_۵)$$

$$v_L = X_L.I_m \sin(\omega t + ۹۰^\circ) \qquad (۳\_۶)$$

از روابط ۵ـ۳ و ۶ـ۳ با توجه به منحنی تغییرات V_R و V_L ، دیاگرام برداری مطابق شکل ۵ـ۳ـب رسم می‌شود .



الف : منحنی تغییرات I, V_L, V_R, V_e در مدار R - L سری



ب : دیاگرام برداری مدار R - L سری

شکل ۵ـ۳

از شکل ۵ ـ۳ـب دیاگرام برداری، می‌توان نوشت :

$$OC^۲ = OA^۲ + AC^۲$$

$$OA = V_R$$

$$OC = V_e$$

$$AC = OB = V_L$$

$$V_e^۲ = V_R^۲ + V_L^۲ \qquad (۳\_۷)$$

با منظورکردن روابط ۲ـ۳، ۳ـ۳ و ۴ـ۳ در رابطه‌ی ۷ـ۳ خواهیم داشت :

$$(ZI_e)^2 = (I_eR)^2 + (I_eX_L)^2$$

$$I_e^2Z^2 = I_e^2R^2 + I_e^2X_L^2 = I_e^2(R^2 + X_L^2) \qquad (۳ـ۸)$$

اگر طرفین رابطه‌ی ۸ـ۳ را به I_e^2 تقسیم کنیم، امپدانس مدار R - L سری مطابق رابطه‌ی ۹ـ۳ به‌دست خواهد آمد .

$$Z^2 = R^2 + X_L^2$$

$$\boxed{Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{R^2 + (L\omega)^2} = \sqrt{R^2 + (2\pi fL)^2}} \qquad (۳ـ۹)$$

۴ـ۳ـ اختلاف فاز و ضریب توان مدار R - L سری

۱ـ۴ـ۳ـ اختلاف فاز: زاویه‌ی بین ولتاژ V_e و جریان I_e را **اختلاف فاز** می‌گویند و با حرف φ نشان می‌دهند.

از شکل ۵ـ۳ـ ب زاویه‌ی φ مطابق رابطه‌ی ۱۰ـ۳ در مدار R - L سری محاسبه می‌شود.

$$\tan\varphi = \frac{AC}{OA} = \frac{V_L}{V_R} = \frac{I_e.X_L}{I_e.R} = \frac{X_L}{R} = \frac{L\omega}{R} \qquad (۳ـ۱۰)$$

$$\boxed{\varphi = \tan^{-1}\frac{X_L}{R} = \tan^{-1}\frac{L\omega}{R}} \qquad (۳ـ۱۱)$$

۲ـ۴ـ۳ـ ضریب توان $\cos\varphi$: کسینوس زاویه‌ی φ را **ضریب توان مفید مدار R - L سری** می‌گویند. از شکل ۵ـ۳ـ ب می‌توان مقدار آن را تعیین کرد. $\cos\varphi$ به ضریب‌توان معروف است و منظور از آن همان ضریب‌توان مفید است اما کلمه‌ی مفید یا مؤثر در اصطلاح $\cos\varphi$ بیان نمی‌شود .

$$\cos\varphi = \frac{OA}{OC} = \frac{V_R}{V_e} = \frac{I_e.R}{I_e.Z}$$

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{R}{Z}} \qquad (۳ـ۱۲)$$

$$R = Z\cos\varphi \qquad (۳ـ۱۳)$$

ضریب‌توان یکی از مشخصه‌های مهّم مدارهای الکتریکی است و به‌صورت $\cos\varphi$ یا p . f[۱] نشان داده می‌شود.

۱ـ p.f مخفف power factor است.

برای توان غیرمؤثر نیز ضریب‌توان تعریف می‌شود و آن‌را با $\sin\varphi$ نشان می‌دهند. از شکل ۵ـ۳ـب مقدار ضریب‌توان غیرمؤثر مطابق رابطه‌ی ۱۴ـ۳ محاسبه می‌شود.

$$\sin\varphi = \frac{AC}{OC} = \frac{V_L}{V_e} = \frac{I_e.X_L}{I_eZ} = \frac{X_L}{Z}$$

$$\boxed{\sin\varphi = \frac{X_L}{Z} = \frac{L\omega}{Z}} \qquad (۳ـ۱۴)$$

۵ـ۳ـ توان‌های مدار R - L سری

۱ـ۵ـ۳ـ توان اکتیو (مؤثر) : مدار R - L، از مقاومت اهمی و مقاومت سلفی تشکیل می‌شود و عبور جریان از مقاومت اهمی موجب می‌شود که توان مفید در مدار R - L سری به مصرف برسد. بنابراین، توان مؤثر در مدار R - L، فقط در مقاومت اهمی مصرف می‌شود. مقدار توان مؤثر در مدار R - L سری را براساس روابط زیر محاسبه می‌کنند.

$$P_e = I_e^2.R \qquad (۳ـ۱۵)$$

$$Z = \frac{V_e}{I_e} \qquad (۳ـ۱۶)$$

$$R = Z\cos\varphi \qquad (۳ـ۱۷)$$

با جایگزینی روابط ۱۶ـ۳ و ۱۷ـ۳ در رابطه‌ی ۱۵ـ۳ خواهیم داشت :

$$P_e = I_e^2 \times Z\cos\varphi = I_e^2 \times \frac{V_e}{I_e} \times \cos\varphi \qquad (۳ـ۱۸)$$

$$\boxed{P_e = V_e I_e \cos\varphi}$$

۲ـ۵ـ۳ـ توان غیرمؤثر (راکتیو یا دواته): وجود مقاومت القایی در مدار R - L سری موجب می‌شود مدار توان غیرمؤثر داشته باشد. مقدار این توان از رابطه‌های زیر به‌دست می‌آید :

$$P_d = I_e^2.X_L = I_e^2.L\omega \qquad (۳ـ۱۹)$$

از رابطه‌ی ۱۴ـ۳ می‌توان نتیجه گرفت :

$$X_L = Z\sin\varphi \qquad (۳ـ۲۰)$$

اگر در رابطه‌ی۱۹ـ۳ به‌جای X_L مقدار آن را از رابطه‌ی ۲۰ـ۳ جایگزین کنیم،خواهیم داشت :

$$P_d = I_e^2 \times Z\sin\varphi = I_e^2 \times \frac{V_e}{I_e} \times \sin\varphi$$

$$\boxed{P_d = V_e I_e \sin\varphi} \qquad (۳\_۲۱)$$

۳ــ۵ــ۳ــ توان ظاهری: با توجه به رابطه‌ی ۲۴ــ۳ توان ظاهری در مدار R - L سری به‌قرار زیر محاسبه می‌شود.

$$\boxed{P_s = \sqrt{P_e^2 + p_d^2} = \sqrt{(V_e I_e \cos\varphi)^2 + (V_e I_e \sin\varphi)^2} = V_e I_e} \quad [V.A] \qquad (۳\_۲۲)$$

۶ــ۳ــ ضریب کیفیت مدار R - L سری (qulality factor)

ضریب کیفیت مدارهای الکتریکی در حالت عام به صورت رابطه‌ی ۳ــ۲۳ تعریف می‌شود.

$$\text{ضریب کیفیت } Q = \frac{۲\pi \quad \text{(ماکزیمم انرژی ذخیره شده)}}{\text{انرژی مصرفی کل در هر سیکل}}$$

به عبارت دیگر، ضریب کیفیت بیانگر خاصیت مدار است که تا چه حد سلفی، خازنی یا اهمی است.

با توجه به‌این‌که در مقاومت‌های سلفی انرژی ذخیره‌شده از رابطه‌ی $W = \frac{۱}{۲}LI^2$ به‌دست می‌آید. در مدار R - L سری، انرژی ذخیره‌شده در سلف وقتی که $I = I_m$ می‌شود، ماکزیمم خواهد شد. برای محاسبه‌ی ضریب‌کیفیت در مدار R - L سری، ابتدا انرژی مصرفی در مقاومت اهمی را به‌دست می‌آوریم.

$$\text{انرژی مصرفی در هر سیکل} = P_e \times T = RI_e^2 T = RI_e^2 \times \frac{۲\pi}{\omega}$$

برای محاسبه‌ی انرژی مصرفی از روابط $I_m = \sqrt{۲}\, I_e$ و $\omega = \frac{۲\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{۲\pi}{\omega}$ درمقاومت اهمی استفاده شده است.

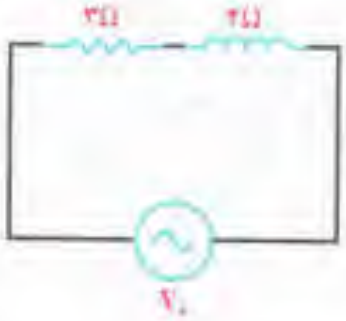
$$\text{ماکزیمم انرژی ذخیره شده در سلف بنابراین :} = \frac{۱}{۲}LI_m^2 = \frac{۱}{۲}L(\sqrt{۲}\, I_e)^2 = LI_e^2$$

$$Q = \frac{۲\pi(I_e^2 L)}{RI_e^2 \times \frac{۲\pi}{\omega}} = \frac{۲\pi\omega I_e^2 L}{RI_e^2 \times ۲\pi}$$

$$\boxed{Q = \frac{L\omega}{R}} \qquad (۳\_۲۴)$$

با مقایسه‌ی رابطه‌ی ۲۴ــ۳ با ۱۰ــ۳ می‌توان نتیجه گرفت که در مدار R - L سری، ضریب کیفیت مدار همان $\tan\varphi$ است.

$$Q = \tan\varphi = \frac{L\omega}{R} = \frac{X_L}{R} \qquad (۳\_۲۵)$$



شکل ۶ـ۳

مثال ۱ـ۳: مدار R - L سری شکل ۶ـ۳ با ولتاژ متناوبی به معادله، $V = ۵۰\sin ۴۰۰t$ تغذیه می‌شود مطلوب است :

الف : امپدانس مدار. از رابطه‌ی ۹ـ۳ می‌توان محاسبه کرد :

$$Z = \sqrt{R^۲ + x_L^۲} = \sqrt{۳^۲ + ۴^۲} = ۵\Omega$$

ب : معادله‌ی جریان مدار : از رابطه‌ی ۱ـ۳ می‌توان محاسبه کرد :

$$I_m = \frac{V_m}{Z} = \frac{۵۰}{۵} = ۱۰\ \text{Amp}$$

و با توجه به رابطه‌ی ۱۱ـ۳ می‌توان نوشت :

$$\varphi = \tan^{-۱}\left(\frac{X_L}{R}\right) = \tan^{-۱}\left(\frac{۴}{۳}\right) = ۵۳^\circ$$

$$i(t) = I_m \sin(\omega t - \varphi) \rightarrow i(t) = ۱۰\sin(۴۰۰t - ۵۳^\circ)$$

پ : اندازه‌ی ضریب خودالقایی سلف :

$$L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{۴}{۴۰۰} = ۰/۰۱\text{H}$$

ت : معادله‌ی ولتاژ دو سر مقاومت اهمی R و القایی X_L .

با توجه به رابطه‌ی ۵ـ۳ می‌توان نوشت : $V_{R_m} = R.I_m = ۳\times ۱۰ = ۳۰V$

$$v_R = R.I_m \sin(\omega t - \varphi) = ۳۰\sin(۴۰۰t - ۵۳^\circ)$$

و با توجه به رابطه‌ی۶ـ۳ می‌توان نوشت :

$$V_{L_m} = X_L.I_m = ۴\times ۱۰ = ۴۰V$$

$$v_L = X_L.I_m \sin\left[(\omega t - \varphi) + \frac{\pi}{۲}\right] = ۴۰\sin(۴۰۰t - ۵۳ + ۹۰) = ۴۰\sin(۴۰۰t + ۳۷^\circ)$$

ت : رسم دیاگرام برداری ولتاژها و جریان مدار.

ـ توان‌های مصرفی و مثلث توان

$$V_e = \frac{V_m}{\sqrt{۲}} = \frac{۵۰}{\sqrt{۲}} \text{ و } I_e = \frac{Im}{\sqrt{۲}} = \frac{۱۰}{\sqrt{۲}}$$

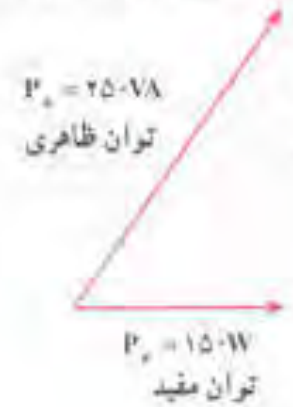
با توجه به رابطه‌ی۲۲ـ۳ داریم : $P_s = V_e.I_e = \frac{۵۰}{\sqrt{۲}} \times \frac{۱۰}{\sqrt{۲}} = ۲۵۰VA$

و با توجه به رابطه‌ی ۱۸ـ۳ داریم :

$$P_e = V_e I_e \cos\varphi = P_s \cdot \cos\varphi = ۲۵۰\cos(۵۳^\circ) = ۲۵۰ \times ۰/۶ = ۱۵۰W$$

و با توجه به رابطه‌ی ۲۱ـ۳ داریم :

$$P_q = V_e I_e \sin\varphi = P_s \cdot \sin\varphi = ۲۵۰\sin ۵۳^\circ = ۲۵۰ \times ۰/۸ = ۲۰۰VAR$$

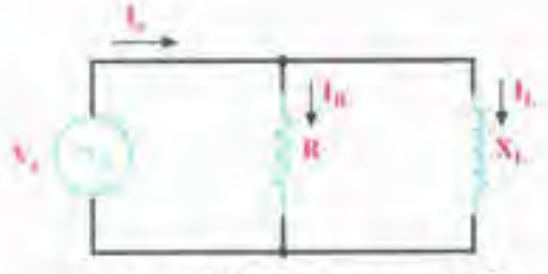


۷ـ۳ـ مدار R - L موازی

مدارهای R - L موازی از یک مقاومت اهمی و یک راکتانس القایی با اتصال موازی تشکیل می‌شوند. مدار الکتریکی اتصال موازی R - L به‌صورت شکل ۷ـ۳ است. این مدارها به‌طور گسترده در مدارهای الکترونیکی و مخابراتی به کار می‌روند. تله‌های امواج و فیلترسازی امواج از جمله کاربردهای این مدارهاست. با توجه به مدار شکل ۷ـ۳ می‌توان گفت که جریان مدار (I_e) از دو جریان I_R و I_L تشکیل می‌شود. چون ولتاژ دو سر راکتانس القایی و مقاومت اهمی با هم برابرند و زاویه‌ی فاز جریان‌های I_R و I_L یکسان نیستند، در مطالعه مدارهای R - L موازی، ولتاژ را مبنا قرار می‌دهند و دیاگرام برداری I_L و I_R را بر اساس ولتاژ مبنا رسم می‌کنند. بردار جریان I_R با ولتاژ هم‌فاز و بردار جریان I_L از ولتاژ ۹۰° پس‌فاز است و مطابق شکل ۸ـ۳ رسم می‌شوند.

جریان کل مدار I_e از جمع برداری $\vec{I_R}$ و $\vec{I_L}$ به‌دست می‌آید :

$$\vec{I_e} = \vec{I_R} + \vec{I_L} \qquad (۳\_۲۶)$$



شکل ۷ـ۳ـ مدار الکتریکی R - L موازی

شکل ۸ـ۳ـ دیاگرام برداری مدار R - L موازی

۱ـ۷ـ۳ـ محاسبه‌ی امپدانس مدار R - L موازی : با توجه به شکل ۷ـ۳ و دیاگرام برداری جریان‌ها می‌توان نوشت :

$$I_e = \frac{V_e}{Z} \quad و \quad I_R = \frac{V_e}{R} \quad و \quad I_L = \frac{V_e}{X_L}$$

$$\overline{OC}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2$$

$$I_e^2 = I_R^2 + I_L^2 \qquad (۳\_۲۷)$$

با جایگزین‌کردن مقادیر I_L ، I_R و I_e در رابطه‌ی ۲۷ـ۳ می‌توان نوشت :

$$\frac{V_e^2}{Z^2} = \frac{V_e^2}{R^2} + \frac{V_e^2}{X_L^2}$$

$$\boxed{\frac{1}{Z^2} = \frac{1}{R^2} + \frac{1}{X_L^2}} \Rightarrow \boxed{Z = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{X^2}}}} \qquad (۳\_۲۸)$$

۲ـ۷ـ۳ـ محاسبه‌ی اختلاف فاز و ضریب توان مدار R - L موازی : در شکل ۸ـ۳ در مثلث OAC می‌توان نوشت :

$$\tan\varphi = \frac{\overline{AC}}{\overline{OA}} = \frac{I_L}{I_R} = \frac{\frac{V_e}{X_L}}{\frac{V_e}{R}} = \frac{V_e R}{V_e X_L}$$

$$\tan\varphi = \frac{R}{X_L} \qquad (۳\_۲۹)$$

$$\boxed{\varphi = \tan^{-1}\frac{R}{X_L}} \qquad (۳\_۳۰)$$

برای محاسبه‌ی ضریب‌توان از مثلث OAC، روابط زیر را می‌نویسیم :

$$\cos\varphi = \frac{\overline{OA}}{\overline{OC}} = \frac{I_R}{I_e}$$

$$\cos\varphi = \frac{\frac{V_e}{R}}{\frac{V_e}{Z}} = \frac{V_e . Z}{V_e . R}$$

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{Z}{R}} \qquad (۳\_۳۱)$$

$$\boxed{\sin\varphi = \frac{\overline{AC}}{\overline{OC}} = \frac{I_L}{I_e} = \frac{Z}{X_L}}$$

۳ـ۷ـ۳ـ محاسبه‌ی توان‌های مدار R - L موازی: از دیاگرام برداری شکل ۸ـ۳ می‌توان نوشت :

$$\cos\varphi = \frac{I_R}{I_e} \Rightarrow I_R = I_e \cos\varphi \qquad (۳ـ۳۲)$$

$$P_e = I_R^2 R = \frac{V_e^2}{R^2} \times R = \frac{V_e^2}{R}$$

$$I_e = \frac{V_e}{Z}$$

با توجه به رابطه‌ی ۳۱ـ۳ و جای‌گذاری روابط خواهیم داشت :

$$P_e = \frac{V_e^2}{Z} = \frac{V_e}{Z} \times V_e \cos\varphi$$

$$\boxed{P_e = I_e . V_e . \cos\varphi} \qquad (۳ـ۳۳)$$

با توجه به رابطه‌ی ۳۱ـ۳ و جای‌گذاری روابط می‌توانیم توان راکتیو را به‌دست آوریم.

$$P_d = X_L I_L^2 = \frac{V_e}{I_L} \times I_L^2 \quad و \quad I_L = I_e \sin\varphi$$

$$P_d = V_e I_L = V_e I_e \sin\varphi \qquad (۳ـ۳۴)$$

توان ظاهری از P_e و P_d به قرار زیر محاسبه می‌شود :

$$P_s = \sqrt{P_d^2 + P_e^2} = \sqrt{V_e^2 I_e^2 \sin^2\varphi + V_e^2 I_e^2 \cos^2\varphi}$$

$$\boxed{P_s = V_e I_e} \qquad (۳ـ۳۵)$$

۴ـ۷ـ۳ـ محاسبه‌ی ضریب کیفیت مدار R - L موازی

$$Q = \frac{۲\pi \times \text{(ماکزیمم انرژی ذخیره شده)}}{\text{انرژی مصرفی در یک سیکل}} = \frac{۲\pi(\frac{۱}{۲} L I_{Lm}^2)}{I_R^2 \times R \times T} = \frac{۲\pi(\frac{۱}{۲} L I_{Lm}^2)}{I_R^2 \times R \times \frac{۲\pi}{\omega}}$$

$$I_{Lm} = \frac{V_m}{X_L} = \frac{\sqrt{۲}V_e}{L\omega} \quad ، \quad I_R = \frac{V_e}{R}$$

$$Q = \frac{۲\pi\left[\frac{۱}{۲} L \times \left(\frac{\sqrt{۲}V_e}{L\omega}\right)^2\right]}{\frac{V_e^2}{R^2} \times R \times \frac{۲\pi}{\omega}} = \frac{R}{L\omega}$$

$$\boxed{Q=\frac{R}{X_L}} \qquad (۳\_۳۶)$$

با مقایسه‌ی روابط ۳۶ـ۳ و ۲۹ـ۳ می‌توان گفت : $\tan\varphi = Q$

مثال ۲ـ۳: مدار الکتریکی شکل ۹ـ۳ از منبع ولتاژ به معادله‌ی $v = ۱۲۰\sqrt{۲}\sin(۲۵۰t + ۴۵^\circ)$ تغذیه می‌شود. مطلوب است.

شکل ۹ـ۳

الف : مقاومت القایی سلف.

$$X_L = L.\omega = ۱۶۰\times۱۰^{-۳}\times۲۵۰ = ۴۰\Omega$$

ب : معادله‌ی جریان هر شاخه.

$$I_{R_m} = \frac{V_m}{R} = \frac{۱۲۰\sqrt{۲}}{۳۰} = ۴\sqrt{۲}\,A$$

جریان مقاومت هم‌فاز با ولتاژ $i_R = ۴\sqrt{۲}\sin(۲۵۰t + ۴۵^\circ)$

$$I_{L_m} = \frac{V_m}{X_L} = \frac{۱۲۰\sqrt{۲}}{۴۰} = ۳\sqrt{۲}\,A$$

جریان سلف ۹۰ درجه عقب‌تر از ولتاژ $i_L = ۳\sqrt{۲}\sin(۲۵۰t + ۴۵^\circ - ۹۰^\circ)$

$$i_L = ۳\sqrt{۲}\sin(۲۵۰t - ۴۵^\circ)$$

پ : جریان کل و معادله‌ی زمانی آن.

$$I_R = \frac{I_{Rm}}{\sqrt{۲}} = \frac{۴\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = ۴A$$

$$I_L = \frac{I_{Lm}}{\sqrt{۲}} = \frac{۳\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = ۳A$$

با توجه به رابطه‌ی ۲۶ـ۳ داریم :

$$\vec{I_e} = \vec{I_R} + \vec{I_L} = \sqrt{I_R^۲ + I_L^۲} = \sqrt{۴^۲ + ۳^۲} = ۵A$$

$$I_m = I_e\sqrt{۲} = ۵\sqrt{۲}\ A$$

براساس رابطه‌ی ۳۰ـ۳ می‌توان نوشت :

$$\varphi = tg^{-۱}\left(\frac{R}{X}\right) = tg^{-۱}\left(\frac{۳۰}{۴۰}\right) = tg^{-۱}(۰/۷۵) = ۳۷^\circ$$

بنابراین، جریان کل به اندازه‌ی $\varphi = ۳۷^\circ$ از ولتاژ منبع عقب‌تر است و داریم :

$$i = ۵\sqrt{۲}\sin\left[(۲۵۰t + ۴۵^\circ) - ۳۷^\circ\right] = ۵\sqrt{۲}\sin(۲۵۰t + ۸^\circ)$$

ت : امپدانس‌مدار.

از رابطه‌ی ۲۸ـ۳ داریم :

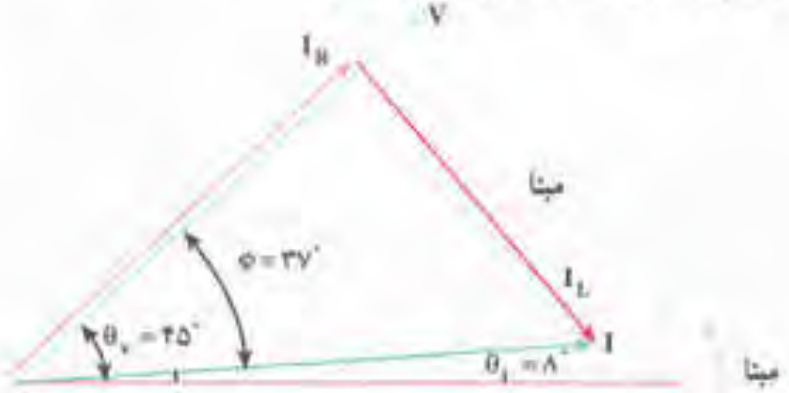
$$\frac{۱}{Z^۲} = \frac{۱}{R^۲} + \frac{۱}{X_L^۲}$$

$$Z = \frac{۱}{\sqrt{\frac{۱}{R^۲} + \frac{۱}{X_L^۲}}} = \frac{۱}{\sqrt{\frac{۱}{۳۰^۲} + \frac{۱}{۴۰^۲}}} = ۲۴\Omega$$

راه ساده‌ی محاسبه‌ی امپدانس مدار استفاده از رابطه‌ی ۱ـ۳ است.

$$Z = \frac{V_e}{I_e} = \frac{V_m}{I_m} = \frac{۱۲۰\sqrt{۲}}{۵\sqrt{۲}} = ۲۴\Omega$$

ث : دیاگرام برداری ولتاژ و جریان‌های مدار.



شکل ۱۰ـ۳

ج : توان‌های مصرفی و مثلث توان.

از رابطه‌ی ۳۲ـ۳ خواهیم داشت :

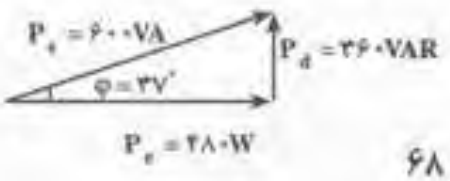
$$P_e = R.I_R^۲ = ۳۰\times(۴)^۲ = ۴۸۰W$$

از رابطه‌ی ۳۱ـ۳ خواهیم داشت :

$$P_d = X_L.I_L^۲ = ۴۰\times(۳)^۲ + ۳۶۰VAR$$

و از رابطه‌ی ۳۵ـ۳ خواهیم داشت :

$$P_s = \sqrt{P_e^۲ + P_d^۲} = \sqrt{۴۸۰^۲ + ۳۶۰^۲} = ۶۰۰VA$$



می‌توان توان‌های مصرفی را از روابط ۳۳ـ۳، ۳۴ـ۳ و ۳۵ـ۳ محاسبه کرد. بدیهی است جواب‌های یکسان خواهند بود.

$$P_e = V_e I_e \cos\varphi = ۱۲۰ \times ۵ \times ۰/۸ = ۴۸۰ W$$

$$P_d = V_e I_e \sin\varphi = ۱۲۰ \times ۵ \times ۰/۶ = ۳۶۰ VAR$$

$$P_s = V_e I_e = ۱۲۰ \times ۵ = ۶۰۰ VA$$

مثال ۳ـ۳: در مثال‌های ۱ـ۳ و ۲ـ۳ ضریب کیفیت مدار را محاسبه کنید.

راه حل:

در مثال ۱ـ۳ ضریب کیفیت برابر است با:

$$Q = \frac{L\omega}{R} = \frac{X_L}{R} = \frac{۴}{۳} = ۱/۳۳$$

در مثال ۲ـ۳ ضریب کیفیت برابر است با:

$$Q = \frac{R}{X_L} = \frac{۳۰}{۴۰} = ۰/۷۵$$

با وجود این که در دو مثال ۱ـ۳ و ۲ـ۳ نسبت راکتانس سلفی به مقاومت اهمی برابر است، درمدار سری ضریب کیفیت بزرگ‌تر است. به عبارت دیگر، خاصیت سلفی بیش‌تر نمایان است؛ در حالی که در مدار موازی خاصیت اهمی مدار بیش‌تر دیده می‌شود. مطلب ذکر شده نشان می‌دهد که در مدار سری، مقاومت و در مدار موازی، عکس مقاومت تعیین‌کننده‌ی خاصیت مدار است.

۸ـ۳ـ اثر فرکانس شبکه برمدارهای R - L

در مدار R - L سری ارتباط عناصر مدار به‌صورت $Z^۲ = R^۲ + (۲\pi fL)^۲$ است. به‌طوری که اگر مقاومت اهمی مدار تغییر نکند، تغییرات فرکانس در مقاومت القایی $X_L = ۲\pi fL$ اثر می‌گذارد و امپدانس مدار را تغییر می‌دهد. اگر فرکانس مدار $f = ۰$ باشد،اندازه‌ی مقاومت القایی برابر صفر خواهد بود و امپدانس مدار $Z = R$ می‌شود. این حداقل مقداری است که امپدانس مدار R - L سری دارد. در این حالت، از مدار جریان $I_e = \frac{V_e}{R}$ عبور می‌کند. این مقدار جریان، حداکثر جریانی است که از مدار R - L سری با دامنه‌ی ولتاژ ثابت V_e می‌گذرد. اگر فرکانس از صفر به بی‌نهایت افزایش یابد، امپدانس (Z) افزایش یافته، $f = \infty$، مقدار امپدانس نیز بی‌نهایت می‌شود. دراین حالت، از مدار جریانی عبور نخواهد کرد. مدار R - L، مثل مدار باز عمل می‌کند؛ بنابراین، با افزایش فرکانس مدار R - L سری را عملاً می‌توان به مدار باز تبدیل کرد. لازم به توضیح است که در مدار R - L افزایش فرکانس تا حد معینی مجاز است؛ زیرا اگر از حد مجاز(فرکانس مجاز) بیشتر شود، خاصیت القایی

مدار از بین می‌رود .

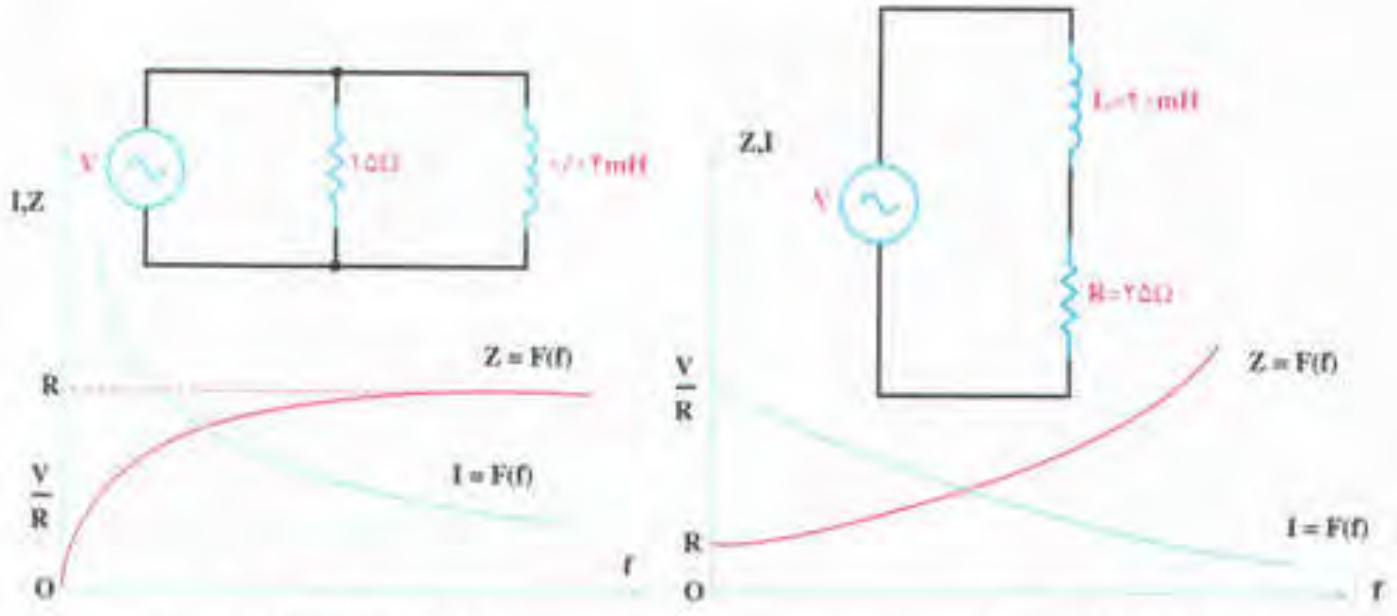
در مدار R - L موازی، امپدانس از رابطه‌ی $\frac{1}{Z^2} = \frac{1}{R^2} + \frac{1}{(2\pi fL)^2}$ محاسبه می‌شود.

اگر فرکانس منبع صفر شود، آن‌گاه $\frac{1}{X_L} = \frac{1}{2\pi fL} = \infty$ خواهد شد و در این حالت $Z = 0$ می‌شود. به‌عبارت دیگر، مدار R - L موازی در فرکانس صفر اتصال کوتاه می‌کند و از مدار جریان اتصال کوتاه عبور خواهد کرد. جریان اتصال کوتاه را به $I_{s.c}$ نشان می‌دهند. اگر فرکانس مدار از صفر به بی‌نهایت افزایش یابد، امپدانس مدار R - L موازی از مقدار اتصال کوتاه ($Z = 0$) به اندازه‌ی مقاومت اهمی ــ یعنی R ــ تغییر می‌کند. به‌طوری‌که در فرکانس‌های خیلی زیاد می‌توان $Z = R$ درنظر گرفت. در فرکانس خیلی زیاد از مدار R - L موازی جریان $I_e = \frac{V_e}{R}$ عبور خواهد کرد.

اثر تغییرات فرکانس بر امپدانس مدار موجب می‌شود ضریب توان $\cos\varphi$ و اختلاف فاز φ و توان‌های اکتیو و راکتیو و ظاهری نیز تغییر کند .

درمدار R - L سری با توجه به $\cos\varphi = \frac{R}{Z}$ و $P_e = V_e I_e \cos\varphi$ و $P_d = V_e I_e \sin\varphi$ ، اگر فرکانس از صفر به بی‌نهایت افزایش یابد، چون امپدانس از $Z = R$ به $Z = \infty$ تغییر می‌کند، $\cos\varphi$ از ۱ به صفر، $\sin\varphi$ از صفر به یک و φ از صفر به ۹۰ درجه تغییر خواهد کرد. بنابراین، توان اکتیو از مقدار ماکزیمم به صفر تغییر می‌یابد و توان غیرمؤثر از مقدار صفر به $P_d = V_e I_e$ رشد می‌کند. پس می‌توان نتیجه گرفت که افزایش فرکانس مدار R - L خاصیت القایی مدار را افزایش می‌دهد .

در مدارموازی با توجه به $\cos\varphi = \frac{Z}{R}$ و $P_e = V_e I_e \cos\varphi$ و $P_d = V_e I_e \sin\varphi$ ، رشد فرکانس از صفر به مقدار خیلی زیاد موجب می‌شود امپدانس از مقدارصفر به R تغییر کند. در این حالت، $\cos\varphi$ از صفر به یک، $\sin\varphi$ از یک به صفر و φ از ۹۰ درجه به صفردرجه تغییر می‌کند. توان اکتیو از صفر به مقدار $P_e = V_e I_e$ و توان راکتیو از مقدار حداکثر به صفر تغییر می‌کند. پس می‌توان نتیجه گرفت که افزایش فرکانس در مدار R - L موازی ، خاصیت سلفی مدار را کاهش می‌دهد و در مقابل خاصیت اهمی مدار را تقویت می‌کند. در شکل‌های ۱۱ــ۳ دو نمونه از اثر فرکانس بر روی Z و I در مدار R - L سری و R - L موازی نشان داده شده است .



الف: اثر فرکانس در مدار R - L سری

ب: اثر فرکانس درمدار R - L موازی

شکل ۱۱ـ۳

۹ـ۳ـ تمرین‌ها

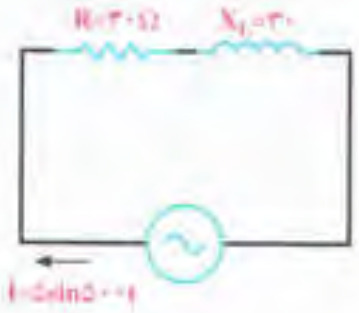
۱ـ در مدار شکل مقابل مطلوب است :

الف : ولتاژ دو سر R و X_L و معادلات زمانی آن‌ها.

ب : ولتاژ منبع و معادله زمانی آن.

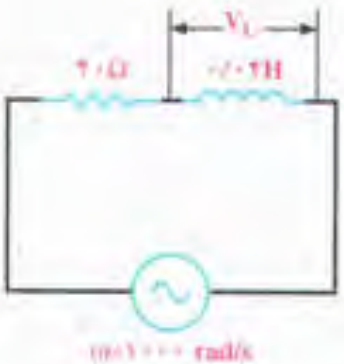
پ : رسم دیاگرام برداری جریان و ولتاژها.

ت : توان اکتیو، راکتیو و ظاهری و مثلث‌توان‌ها.

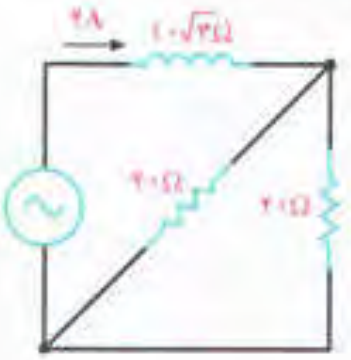


۲ـ در یک مدار RL سری معادله ولتاژ و جریان به ترتیب $V = ۲۰۰\sin(۳۱۴t + ۲۰)$ و $i = ۱۰\sin(۳۱۴t - ۱۰)$ است اندازه R و L چه‌قدر است؟

۳ـ در مدار شکل مقابل ولتاژ دو سر سلف $V_L = ۴۰V$ است ولتاژ منبع چند ولت است؟



۴ـ در مدار شکل زیر ولتاژ منبع چند ولت است؟



۵ــ یک مقاومت ۵ اهمی با یک سلف نامشخص به‌طور سری به هم متصل‌اند. معادله‌ی ولتاژ دو سر مقاومت $v_R = 25\sin(200t + 30^\circ)$ است. اگر $\varphi = \frac{\pi}{3}$ باشد، مطلوب است :

الف : ضریب خودالقایی سلف　　ب : معادله‌ی جریان مدار

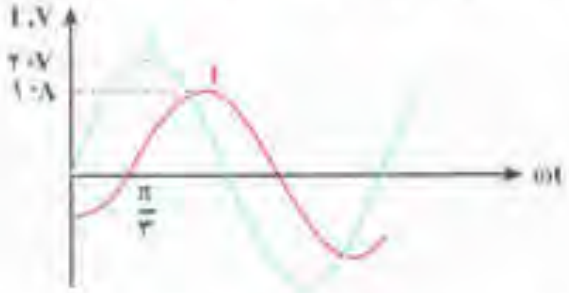
پ : معادله‌ی ولتاژ کل　　ت : معادله‌ی ولتاژ دو سر سلف

۶ــ از یک مدار RL سری شدت جریانی به معادله $i = 3\sqrt{2}\sin 100\pi t$ می‌گذرد. اگر $\frac{Z}{R} = \frac{5}{3}$ و ولتاژ دو سر سلف $V_L = 200V$ باشد، مثلث توان‌ها را با درج مقادیر رسم کنید.

۷ــ در یک مدار RL سری با $L = 10H$ و $R = 3\Omega$ مقدار فرکانس چه‌قدر انتخاب شود تا جریان به اندازه‌ی $\frac{\pi}{6}$ تأخیر فاز داشته باشد.

۸ــ در یک مدار RL سری با $L = 5mH$ و $R = 2\Omega$ درجه فرکانسی ضریب کیفیت مدار $\frac{\pi}{1000}$ می‌شود؟

۹ــ در یک مدار RL سری تابع تغییرات ولتاژ و جریان مطابق شکل زیر است اندازه R و X_L چه‌قدر است؟



۱۰ــ در مدار شکل مقابل $i(t) = 5\sqrt{2}\sin 250t$ می‌باشد، مطلوب است.

الف : امپدانس مدار.

ب : ولتاژ منبع و معادله‌ی آن.

پ : جریان I_R و I_L و معادله‌های آن‌ها.

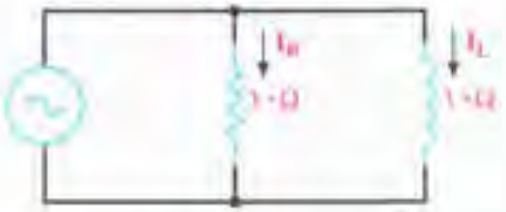
ت : رسم دیاگرام برداری ولتاژ و جریان‌های مدار.

ث : توان‌های اکتیو، راکتیو ظاهری و مثلث توان.

۱۱ــ در مدار شکل مقابل اگر $I_L = 3$ آمپر باشد، مطلوب است

الف : ولتاژ منبع　　ب : جریان منبع

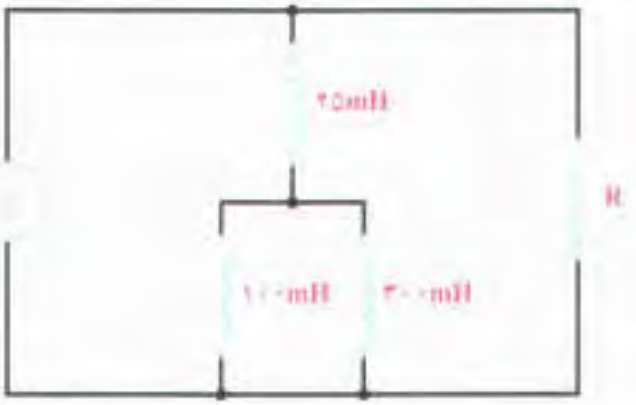
پ : معادله‌ی ولتاژ و جریان منبع



۱۲ــ در مدار شکل زیر، معادله‌ی ولتاژ و جریان منبع به ترتیب $i = ۲\sin(۵۰۰t - \frac{\pi}{۴})$ و $v = ۵۰\sqrt{۲}\sin ۵۰۰t$ است. مطلوب است:

الف: امپدانس کل مدار.

ب: اندازه‌ی R.



۱۳ــ مدار RL موازی شکل زیر را به یک مدار RL سری تبدیل کنید.

فصل چهارم

مدارهای R - C جریان متناوب

هدف‌های رفتاری : در پایان این فصل ازدانش‌آموزانتظارمی‌رود :

۱ـ مقادیر مقاومت ظاهری، اختلاف فاز، جریان، ولتاژ، ضریب‌توان و ضریب‌کیفیت مدارهای R-C سری و موازی را با نوشتن فرمول‌های مربوط محاسبه کند.

۲ـ دیاگرام پرداری ولتاژها را در مدارهای R-C سری و جریان‌ها را در مدارهای R-C موازی رسم کند .

۳ـ رابطه‌ی بین فرکانس و مقاومت ظاهری را در مدارهای R-C سری و موازی بنویسد .

۴ـ تأثیر فرکانس بر مقاومت ظاهری، جریان، اختلاف فاز و ضریب‌قدرت را در مدارهای R-C سری و موازی را شرح دهد .

۵ ـ منحنی تغییرات اثر فرکانس بر امپدانس و جریان در مدارهای R-C سری و موازی را از طریق نقطه‌یابی رسم کند .

۱ـ۴ـ مقدمه

کاربرد عناصر اهمی و خازنی در مدارهای الکترونیکی و مخابرات و الکترونیک صنعتی و شبکه‌های قدرت مثلاً فیلترها، تایمرها، تصحیح‌کننده ضریب توان، ضرورت بحث مدارهای R-C را ایجاب می‌کند. از طرف دیگر، خازن ایده‌آل عملاً وجود ندارد ؛ زیرا هر خازن حقیقی علاوه بر راکتانس خازنی یک مقاومت نشتی‌دارد. به همین علت، هر خازن حقیقی را می‌توان به‌صورت یک مقاومت اهمی و یک راکتانس خازنی ایده‌آل به‌صورت مدار R-C سری یا موازی مُدل کرد و سپس مدار آن‌را تحلیل نمود. در این فصل، رفتار مدارهای R-C سری و موازی در جریان متناوب در

حالت پایدار (ماندگار) بررسی خواهیم کرد؛ زیرا حالت‌های گذرای این مدارها از محدوده‌ی بحث ما خارج است. پاسخ گذرا در مدارهای الکتریکی عکس‌العمل مدار در مقابل تغییرات جریان و ولتاژ شبکه است که با گذشت زمان از بین می‌رود.

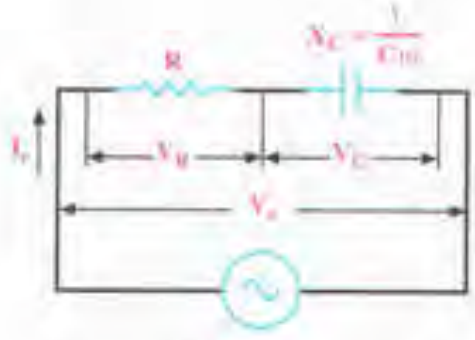
۲ـ۴ـ مدار R - C سری

مدار الکتریکی R-C سری مطابق شکل ۱ـ۴ است. ولتاژ منبع از ولتاژ V_R و V_C تشکیل می‌شود. جریان در هر دو عنصر C و R یکسان و برابر I_e است. ولتاژ دو سر مقاومت اهمی با جریان I_e هم‌فاز و ولتاژ دو سر خازن V_c از جریان I_e، 90° الکتریکی پس‌فاز است. برای به‌دست‌آوردن ولتاژ V_e، چون $\vec{V_R}$ و $\vec{V_C}$ بردارهای جداگانه‌ای هستند، از دیاگرام برداری استفاده می‌کنیم. برای رسم دیاگرام برداری، جریان I_e را مبنا قرارمی‌دهیم و $\vec{V_R}$ را هم فاز با جریان و $\vec{V_C}$ را 90° پس‌فاز از جریان مطابق شکل ۲ـ۴ رسم می‌کنیم. جمع برداری $\vec{V_e} = \vec{V_R} + \vec{V_C}$، ولتاژ منبع و به‌عبارت دیگر، ولتاژ دوسر R - C سری را نشان خواهد داد. اگر جریان لحظه‌ای مدار را به‌صورت $i = I_m \sin(\omega t)$ فرض کنیم، ولتاژ لحظه‌ای V_R و V_c به‌صورت‌های زیر بیان خواهند شد:

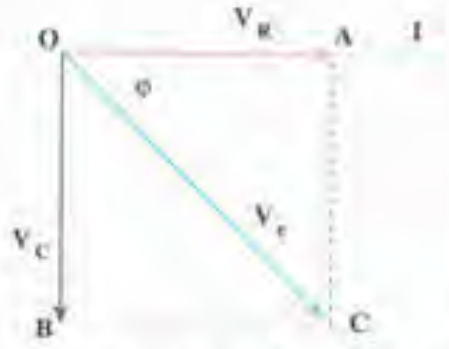
$$i = I_m \sin \omega t \qquad (۴ـ۱)$$

$$v_R = I_m . R \sin \omega t \qquad (۴ـ۲)$$

$$v_C = I_m . X_c \sin(\omega t - 90^\circ) = \frac{I_m}{C\omega} \sin(\omega t - 90^\circ) \qquad (۴ـ۳)$$



شکل ۱ـ۴ـ مدار الکتریکی R-C سری



شکل ۲ـ۴ـ دیاگرام برداری مدار R-C سری

۱ـ۲ـ۴ـ محاسبه‌ی امپدانس مدار R - C سری: در شکل ۱ـ۴ و دیاگرام برداری شکل ۲ـ۴ می‌توان نوشت:

$$V_R = R . I_e \qquad (۴ـ۴)$$

$$V_c = I_e X_c = I_e \times \frac{1}{C\omega} = \frac{I_e}{2\pi fC} \qquad (۴-۵)$$

در مثلث OAC شکل ۲ـ۴ می‌توان نوشت :

$$\overline{OC}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AC}^2$$

$$V_e^2 = V_R^2 + V_c^2$$

$$I_e^2 Z^2 = I_e^2 R^2 + I_e^2 X_c^2$$

$$Z^2 = R^2 + X_c^2$$

$$\boxed{Z = \sqrt{R^2 + X_C^2} = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega}\right)^2} = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{2\pi fC}\right)^2}} \qquad (۴-۶)$$

۲ـ۲ـ۴ـ محاسبه‌ی اختلاف فاز و ضریب‌توان در مدار R - C سری : از شکل ۲ـ۴ و مثلث OAC می‌توان نوشت :

$$\tan\varphi = \frac{\overline{AC}}{\overline{OA}} = \frac{V_C}{V_R} = \frac{I_e . X_C}{I_e . R} \qquad (۴-۷)$$

بنابراین، اختلاف فاز برابر است با :

$$\boxed{\varphi = \tan^{-1}\frac{X_C}{R} = \tan^{-1}\frac{1}{R.C.\omega}} \qquad (۴-۸)$$

ضریب‌توان برابر است با :

$$\cos\varphi = \frac{\overline{OA}}{\overline{OC}} = \frac{V_R}{V_e} = \frac{I_e . R}{I_e . Z}$$

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{V_R}{V_e} = \frac{R}{Z}} \qquad (۴-۹)$$

$\sin\varphi$ را از شکل ۲ـ ۴ و مثلث OAC می‌توان به‌قرار زیر حساب کرد :

$$\sin\varphi = \frac{\overline{AC}}{\overline{OC}} = \frac{V_C}{V_e} = \frac{I_e . X_C}{I_e \times Z}$$

$$\sin\varphi = \frac{V_C}{V_e} = \frac{X_C}{Z} \qquad (۴-۱۰)$$

۳ـ۲ـ۴ـ محاسبه‌ی توان‌ها در مدار R-C سری: برای توان مؤثر می‌توان نوشت :

$$P_e = RI_e^2 \qquad (۴ـ۱۱)$$

از رابطه‌ی ۹ـ۴ مقاومت R برابر است با : $R = Z\cos\varphi$

از طرف دیگر، امپدانس مدار برابر است با : $Z = \frac{V_e}{I_e}$

با جایگزینی مقادیر در رابطه‌ی ۱۱ـ۴ توان مؤثر به‌صورت رابطه‌ی ۱۲ـ۴ ظاهر می‌شود :

$$P_e = Z\cos\varphi \times I_e^2$$

$$P_e = \frac{V_e}{I_e}\cos\varphi \times I_e^2$$

$$\boxed{P_e = I_e V_e \cos\varphi} \qquad (۴ـ۱۲)$$

برای محاسبه‌ی توان غیرمؤثر می‌توان نوشت :

$$P_d = I_e^2 X_C \qquad (۴ـ۱۳)$$

از رابطه‌ی ۱۰ـ۴ مقادیر Z و X_C را در رابطه‌ی ۱۳ـ۴ جایگزین می‌کنیم.

$$X_C = Z\sin\varphi \quad و \quad Z = \frac{V_e}{I_e}$$

$$P_d = I_e^2 . Z\sin\varphi = I_e^2 \frac{V_e}{I_e}\sin\varphi$$

بنابراین :

$$\boxed{P_d = -V_e I_e \sin\varphi} \qquad (۴ـ۱۴)$$

درمدارهای R - C جریان پیش‌فاز است ؛ بنابر قرارداد توان P_d را با علامت منفی خواهیم داشت.

از رابطه‌های ۱۲ـ۴ و ۱۴ـ۴ توان ظاهری را به‌قرار زیر می‌توان محاسبه کرد :

$$P_s = \sqrt{P_e^2 + P_d^2} = \sqrt{V_e^2 I_e^2 \cos^2\varphi + V_e^2 I_e^2 \sin^2\varphi}$$

$$\boxed{P_s = V_e I_e} \qquad (۴ـ۱۵)$$

مثال ۱ـ۴: در یک مدار R - C سری متشکل از $R = 8\Omega$ و $C = 30\mu F$، در چه فرکانسی

جریان مدار ۳۰° از ولتاژ پیش‌فاز خواهد شد ؟

راه حل:

$$\varphi = ۳۰^\circ \quad \text{و} \quad \varphi = \tan^{-۱}\frac{۱}{۲\pi fCR}$$

$$\tan ۳۰^\circ = \frac{۱}{۲\pi fCR}$$

$$\frac{\sqrt{۳}}{۳} = \frac{۱}{۲\pi \times f \times ۳۰ \times ۱۰^{-۶} \times ۸} \Rightarrow f = \frac{۳ \times ۱۰^{۶}}{\sqrt{۳} \times ۲\pi \times ۳۰ \times ۸}$$

$$f = ۱۱۴۹/۲Hz$$

مثال ۲ــ۴: در یک مدار R-C سری، تابع تغییرات ولتاژ و جریان به‌ترتیب $v = ۲۲۰\sin(۱۰۰\pi t)$ و $i = ۵\sin(۱۰۰\pi t + ۶۰^\circ)$ است. مطلوب است :

الف ــ عناصر مدار R و C

ب ــ معادله‌ی زمانی ولتاژ دو سر مقاومت اهمی و خازن.

پ ــ رسم منحنی تغییرات ولتاژ و جریان کل و ولتاژ دوسر مقاومت اهمی و خازن.

ت ــ رسم دیاگرام برداری ولتاژها در مبنای ولتاژ.

ث ــ محاسبه‌ی توان‌ها و رسم مثلث توان‌ها.

راه‌حل :

الف ــ از معادلات ولتاژ و جریان می‌توان نوشت :

$$V_e = \frac{۲۲۰}{\sqrt{۲}} = ۱۵۵/۶ \text{ ولت} \quad \text{و} \quad I_e = \frac{۵}{\sqrt{۲}} = ۳/۵۳A$$

$$\omega = ۱۰۰\pi \quad \text{و} \quad f = \frac{\omega}{۲\pi} = \frac{۱۰۰\pi}{۲\pi} = ۵۰Hz$$

$$\varphi = \theta_v - \theta_i = ۰ - ۶۰ = -۶۰^\circ \quad \text{و} \quad I_m = ۵A \quad \text{و} \quad V_m = ۲۲۰V$$

$$Z = \frac{V_m}{I_m} = \frac{۲۲۰}{۵} = ۴۴\Omega$$

از روابط ۹ــ۴ و ۱۰ــ۴ می‌توان نوشت :

$$R = Z\cos\varphi = ۴۴ \times \cos(-۶۰) = ۴۴ \times \frac{۱}{۲} = ۲۲\Omega$$

$$X_C = |Z\sin\varphi| = |۴۴\sin(-۶۰)| = ۴۴ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۳۸/۱\Omega$$

ب ــ $$v_R = I_e\sqrt{۲}R\sin(\omega t + \varphi_i)$$

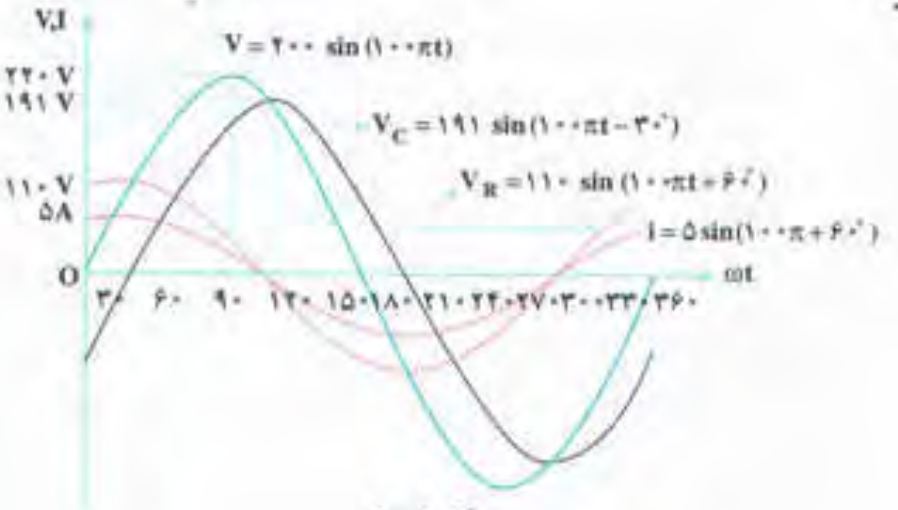
$$V_R = ۳/۵۳ \times \sqrt{۲} \times ۲۲ \times \sin(۱۰۰\pi t + ۶۰^\circ)$$

$$v_R = ۱۱۰\sin(۱۰۰\pi t + ۶۰^\circ)$$

$$v_C = I_m . X_C \sin(۱۰۰\pi t + ۶۰ - ۹۰)$$

$$v_C = ۵ \times ۳۸/۱ \sin(۱۰۰\pi t - ۳۰) = ۱۹۱\sin(۱۰۰\pi t - ۳۰^\circ)$$

ب ـ



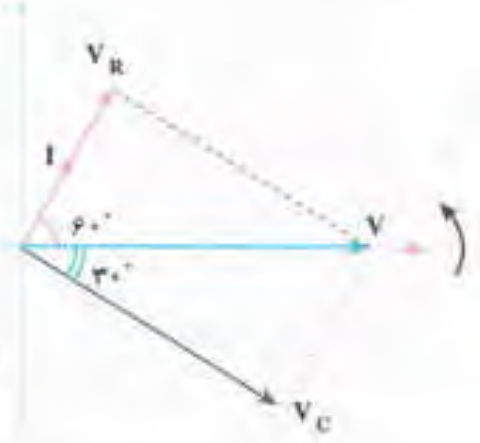
شکل ۳ـ۴

ت ـ

$$V_C = \frac{۱۹۱}{\sqrt{۲}} = ۱۳۵ \text{ ولت} \quad \text{و} \quad \varphi_c = -۳۰^\circ$$

$$V_R = \frac{۱۱۰}{\sqrt{۲}} = ۷۷/۷۸ \text{ ولت} \quad \text{و} \quad \varphi_R = ۶۰^\circ$$

$$I = \frac{۵}{\sqrt{۲}} = ۳/۵۳A \quad \text{و} \quad \varphi_i = ۶۰^\circ$$



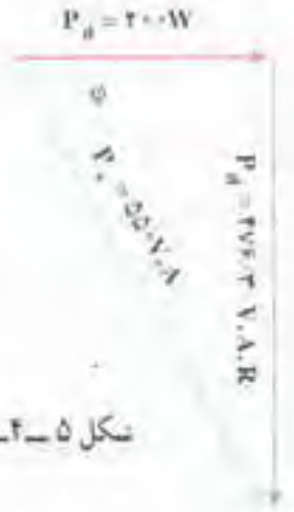
شکل ۴ـ۴ـ دیاگرام برداری

ث ـ

$$P_e = V_e I_e \cos\varphi = I_e^۲ R = \frac{۲۲۰}{\sqrt{۲}} \times \frac{۵}{\sqrt{۲}} \times \cos ۶۰ = ۲۷۵W$$

$$P_d = -V_e I_e \sin\varphi = -I_e^۲ X_C = \frac{-۲۲۰}{\sqrt{۲}} \times \frac{۵}{\sqrt{۲}} \times \sin ۶۰ = -۴۷۶/۳V.A.R$$

$$P_s = V_e I_e = \frac{۲۲۰}{\sqrt{۲}} \times \frac{۵}{\sqrt{۲}} = ۵۵۰ \ V.A$$



شکل ۵ــ۴ــ مثلث توان‌ها

۴ــ۲ــ۴ــ ضریب کیفیت مدار R-C سری

$$Q = \frac{۲\pi \times (\text{ماکزیمم انرژی ذخیره شده})}{\text{انرژی مصرفی در یک سیکل}}$$

$$\text{ماکزیمم انرژی ذخیره‌شده در خازن} = \frac{۱}{۲} C \ V_{cm}^{۲} = \frac{۱}{۲} C \ I_m^{۲} X_c^{۲}$$

$$= \frac{۱}{۲} C \times (\sqrt{۲} I_e)^{۲} \times \frac{۱}{C^{۲}\omega^{۲}}$$

$$\text{انرژی ذخیره‌شده در خازن} = I_e^{۲} \times \frac{۱}{C\omega^{۲}}$$

$$\text{انرژی مصرفی در یک سیکل} = RI_e^{۲} \times T = RI_e^{۲} \times \frac{۲\pi}{\omega}$$

با جایگزینی روابط به‌دست‌آمده در فرمول ضریب کیفیت خواهیم داشت :

$$Q = \frac{۲\pi \times I_e^{۲} \times \frac{۱}{C\omega^{۲}}}{RI_e^{۲} \times \frac{۲\pi}{\omega}}$$

$$\boxed{Q = \frac{۱}{C\omega R} \quad \text{یا} \quad Q = \frac{X_C}{R}} \qquad (۴ــ۱۶)$$

مثال ۳ــ۴: ضریب کیفیت در مدار مثال ۲ــ۴ چه‌قدر است ؟

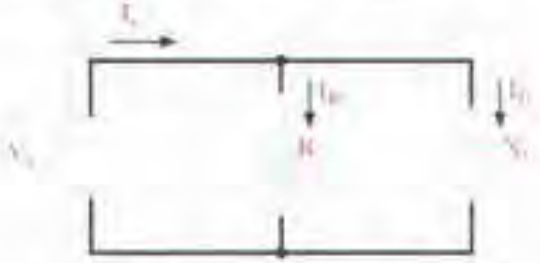
$$X_C = Z\sin\varphi = ۳۸/۱۸$$

$$R = Z\cos\varphi = ۲۲\Omega$$

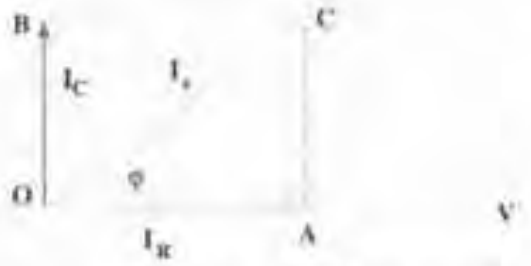
$$Q = \frac{X_C}{R} = \frac{۳۸/۱۸}{۲۲} = ۱/۷۳$$

۳ــ۴ــ مدار R - C موازی

یک خازن حقیقی را عملاً به‌صورت یک خازن ایده‌آل و یک مقاومت اهمی موازی با آن مُدل می‌کنند. مقاومت اهمی موازی‌شده را **مقاومت نشتی خازن** گویند و علت تخلیه‌ی خازن را در مرور زمان به‌وسیله‌ی این مدار توجیه می‌کنند. الکترون‌ها از طریق این مقاومت بزرگ از پلاریته‌ی مثبت خازن (صفحه‌ی مثبت) به‌طرف پلاریته‌ی منفی خازن (صفحه‌ی منفی)، مدارشان را کامل می‌کنند و خازن تخلیه می‌شود. مدارالکتریکی R-C موازی مطابق شکل ۶ــ۴ است. ولتاژ هر دو عنصر C و R باهم یکسان و برابر ولتاژ منبع است. جریان کل مدار از دو جریان غیرهم‌جنس I_R (اهمی) و I_C (خازنی) تشکیل می‌شود. جریان I_R با ولتاژ منبع هم‌فاز و جریان I_C از ولتاژ منبع ۹۰ درجه پیش‌فاز است. برای مطالعه‌ی مدار R-C موازی و تحلیل آن، دیاگرام برداری جریان‌ها را مطابق شکل ۷ــ۴ رسم می‌کنند و محاسبه‌های لازم را انجام می‌دهند. چون ولتاژ هر دو عنصر C و R یکسان است، در رسم دیاگرام به‌منظور سادگی محاسبات، ولتاژ را مبنا قرار می‌دهند.



شکل ۶ــ۴ــ مدار الکتریکی R - C موازی



شکل ۷ــ۴ــ دیاگرام برداری مدار R - C موازی

۱ــ۳ــ۴ــ محاسبه‌ی امپدانس مدار R - C موازی: با استفاده از شکل‌های ۶ــ۴ و ۷ــ۴ می‌توان نوشت :

$$I_R = \frac{V_e}{R} \qquad (۴ــ۱۷)$$

$$I_C = \frac{V_e}{X_C} \qquad (۴ــ۱۸)$$

نتیجه‌ی جمع دو بردار $\vec{I_R}$ و $\vec{I_C}$ جریان $\vec{I_e}$ است.

$$\vec{I_e} = \vec{I_R} + \vec{I_C}$$

با توجه به مثلث OAC خواهیم داشت :

$$\overline{OC}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AC}^2$$

$$I_e^2 = I_R^2 + I_C^2 \qquad (۴ــ۱۹)$$

با جایگزینی روابط ۱۷ـ۴ و ۱۸ـ۴ در رابطه‌ی ۱۹ـ۴ خواهیم داشت :

$$V_e = I_e Z \Rightarrow Z = \frac{V_e}{I_e}$$

$$\frac{V_e^2}{Z^2} = \frac{V_e^2}{R^2} + \frac{V_e^2}{X_C^2}$$

$$\boxed{\frac{1}{Z^2} = \frac{1}{R^2} + \frac{1}{X_C^2}} \Rightarrow \boxed{Z = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{X_C^2}}}} \qquad (۴ـ۲۰)$$

۲ـ۳ـ۴ـ محاسبه‌ی اختلاف فاز بین ولتاژ و جریان و ضریب‌توان: برای محاسبه‌ی φ اختلاف فاز بین ولتاژ و جریان از مثلث OAC شکل ۷ـ۴ استفاده می‌کنیم و می‌نویسیم :

$$\tan\varphi = \frac{\overline{AC}}{\overline{OA}} = \frac{I_C}{I_R}$$

$$\tan\varphi = \frac{\frac{V_e}{X_C}}{\frac{V_e}{R}} = \frac{V_e R}{V_e X_C}$$

یا ساده کردن رابطه، خواهیم داشت :

$$\tan\varphi = \frac{I_C}{I_R} = \frac{R}{X_C} = RC\omega \qquad (۴ـ۲۱)$$

اگر از رابطه‌ی ۲۱ـ۴، arctan گرفته شود، زاویه‌ی φ (اختلاف ولتاژ بین جریان و ولتاژ) به‌دست می‌آید .

$$\varphi = \tan^{-1} RC\omega \quad \text{یا} \quad \varphi = \tan^{-1} = \frac{I_C}{I_R} \qquad (۴ـ۲۲)$$

کسینوس زاویه‌ی φ به‌دست‌آمده در رابطه‌ی ۲۲ـ۴ ضریب توان را تعیین می‌کند. برای محاسبه‌ی ضریب‌توان از مثلث OAC در شکل ۷ـ۴ می‌توان نوشت :

$$\cos\varphi = \frac{\overline{OA}}{\overline{OC}} = \frac{I_R}{I_e} = \frac{V_e Z}{V_e R}$$

بنابراین :

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{I_R}{I_e} = \frac{Z}{R}} \qquad (۴ـ۲۳)$$

برای تعیین $\sin\varphi$، از مثلث OAC شکل ۷ـ۴ می‌توان نوشت :

$$\sin\varphi = \frac{\overline{AC}}{\overline{OC}} = \frac{I_C}{I_e} = \frac{V_e Z}{V_e X_C}$$

$$\boxed{\sin\varphi = \frac{I_C}{I_e} = \frac{Z}{X_c}} \qquad (۴\_۲۴)$$

۳ـ۳ـ۴ـ محاسبه‌ی ضریب کیفیت مدار R-C موازی: می‌دانید که انرژی ذخیره‌شده در یک خازن به ظرفیت C و ولتاژ دوسر آن (V) از رابطه‌ی $W = \frac{1}{2}CV^2$ به‌دست می‌آید. ماکزیمم انرژی ذخیره‌شده توسط ولتاژ ماکزیمم V_m ایجاد می‌شود ؛ بنابراین، $W_m = \frac{1}{2}CV_m^2$ ماکزیمم انرژی ذخیره شده در خازن خواهد بود. انرژی مصرفی در مقاومت اهمی در یک سیکل از رابطه‌ی $W = P.T = I_e^2 R \times \frac{2\pi}{\omega}$ تعیین می‌شود. I_e جریان مؤثر مقاومت اهمی است که از رابطه‌ی $I_e = \frac{V_e}{R}$ به‌دست می‌آید. برای محاسبه‌ی ضریب کیفیت می‌توان نوشت :

$$Q = \frac{2\pi \text{ (ماکزیمم انرژی ذخیره در خازن)}}{\text{انرژی مصرفی در یک سیکل}}$$

$$Q = \frac{2\pi\left(\frac{1}{2}CV_m^2\right)}{R \times \frac{V_e^2}{R^2} \times \frac{2\pi}{\omega}} \Rightarrow \boxed{Q = RC\omega} \qquad (۴\_۲۵)$$

۴ـ۳ـ۴ـ توان‌ها در مدار R-C موازی: با توجه به روش محاسبه‌ی توان‌ها در مدارهای R-C می‌توان نوشت :

P_e توان مؤثر به‌صورت زیر نوشته می‌شود :

$$P_e = I_R^2 R = \frac{V_e^2}{R} = V_e I_e \cos\varphi \qquad (۴\_۲۶)$$

P_d توان غیرمؤثر از رابطه‌ی زیر تعیین می‌شود :

$$P_d = I_C^2 X_C = \frac{V_e^2}{X_C} = V_e I_e \sin\varphi \qquad (۴\_۲۷)$$

P_s توان ظاهری برابر است با :

$$P_s = \sqrt{P_e^2 + P_d^2} = V_e I_e \qquad (۴\_۲۸)$$

مثال ۴ــ۴: در مدار RC موازی شکل مقابل اگر ولتاژ منبع $v = ۱۹۲\sqrt{۲}\sin ۲۵۰t$ باشد، مطلوب است :

الف : جریان هر شاخه و معادلات آن‌ها.

$$X_C = \frac{۱}{C\omega} = \frac{۱}{۲۵۰\times ۱۰^{-۶}\times ۲۵۰} = ۱۶\Omega$$

$$V_e = \frac{V_m}{\sqrt{۲}} = \frac{۱۹۲\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = ۱۹۲V$$

$$I_R = \frac{V_e}{R} = \frac{۱۹۲}{۱۲} = ۱۶A$$

$$I_{Rm} = I_e \cdot \sqrt{۲} = ۱۶\sqrt{۲}A$$

جریان مقاومت هم فاز با ولتاژ $i_R = ۱۶\sqrt{۲}\sin ۲۵۰t$

$$I_C = \frac{V_e}{X_c} = \frac{۱۹۲}{۱۶} = ۱۲A$$

$$I_{cm} = I_C \cdot \sqrt{۲} = ۱۲\sqrt{۲}A$$

جریان خازن ۹۰ درجه جلوتر از ولتاز $i_C = ۱۲\sqrt{۲}\sin(۲۵۰t + ۹۰^\circ)$

ب : رسم دیاگرام برداری $\vec{I_R}$ ، $\vec{I_C}$ و $\vec{I}$.

شکل ۸ــ۴ مبنا

ب : جریان کل و معادله‌ی آن :

با توجه به شکل ۸ ــ۴ داریم : $\vec{I_e} = \vec{I_R} + \vec{I_C} = \sqrt{I_R^2 + I_C^2} = \sqrt{۱۶^2 + ۱۲^2} = ۲۰A$

$$I_m = I_e\sqrt{۲} = ۲۰\sqrt{۲}\ A$$

از رابطه‌ی ۲۲ـ۴ خواهیم داشت :

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{I_C}{I_R}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{۱۲}{۱۶}\right) = ۳۷^\circ$$

I به اندازه‌ی φ از V جلوتر است.

$$i = ۲۰\sqrt{۲}\sin(۲۵۰t + ۳۷^\circ)$$

ت : امپدانس مدار.

از رابطه‌ی ۲۰ـ۴ داریم :

$$\frac{۱}{Z^۲} = \frac{۱}{R^۲} + \frac{۱}{X^۲_c}$$

ولی با دانستن V_e و I_e که ساده‌ترین راه برای محاسبه‌ی Z رابطه‌ی ۱ـ۳ است.

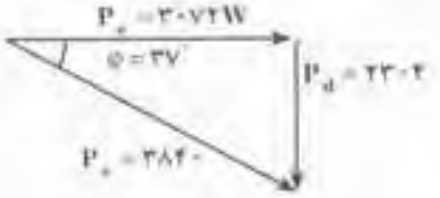
$$Z = \frac{V_e}{I_e} = \frac{V_m}{I_m} = \frac{۱۹۲\sqrt{۲}}{۲۰\sqrt{۲}} = ۹۰۶\Omega$$

ث : محاسبه‌ی توان‌ها و رسم مثلث توان.

$$P_e = V_e I_e \cos\varphi = ۱۹۲ \times ۲۰ \times \cos(۳۷^\circ) = ۳۰۷۲W$$

$$P_d = V_e I_e \sin\varphi = ۱۹۲ \times ۲۰ \times \sin(-۳۷^\circ) = -۲۳۰۴ \ VAR$$

$$P_s = \sqrt{P^۲_e + P^۲_d} = \sqrt{(۳۰۷۲)^۲ + (-۲۳۰۴)^۲} = ۳۸۴۰ \ VA$$



۴ـ۴ـ تأثیر فرکانس بر مدارهای R - C

با توجه به امپدانس‌های محاسبه‌شده برای مدار R - C سری، $Z = \sqrt{R^۲ + X^۲_C}$ و مدار R - C موازی $\frac{۱}{Z^۲} = \frac{۱}{R^۲} + \frac{۱}{X^۲_C}$ و درنظرگرفتن این‌که $X_C = \frac{۱}{۲\pi fC}$، مشخص می‌شود. تغییرات فرکانس مدار در امپدانس مدارR-C سری و موازی اثر می‌گذارد. کمیت‌های $\cos\varphi$ و $\sin\varphi$ و Q به‌طریقی به امپدانس مدار مرتبط‌اند ؛ بنابراین، تغییرات فرکانس، این کمیّت‌ها را نیز تغییر می‌دهد.

همچنین با توجه به این‌که $I_e = \frac{V_e}{Z}$، $P_e = V_e I_e \cos\varphi$، $P_d = V_e I_e \sin\varphi$ و $P_s = V_e I_e$ هستند، این کمیّت‌ها نیز با تغییرات حاصل در فرکانس شبکه تغییر خواهند کرد.

با در نظر گرفتن مطالب گفته شده تأثیر فرکانس را بر روی جریان و امپدانس مدار R - C سری و موازی به‌طور جداگانه بررسی می‌کنیم .

۱ــ۴ــ۴ــ تأثیر فرکانس در مدار R - C سری: در شکل ۱ــ۴ فرض می‌کنیم فرکانس منبع ولتاژ از صفر تا ∞ تغییر کند ولی دامنه‌ی ولتاژ ثابت باقی بماند. مقادیر R و C نیز در تغییرات فرکانس مقادیر ثابت باقی بمانند. فرکانس مدار را هم صفر در نظر می‌گیریم. می‌دانیم در جریان DC فرکانس مدار صفر است. خازن در مدارهای DC خیلی سریع شارژ می‌شود و جریان مدار را قطع می‌کند و منبع ولتاژ با مدار باز ــ یعنی امپدانس بی‌نهایت ــ مواجه می‌شود. بنابراین :

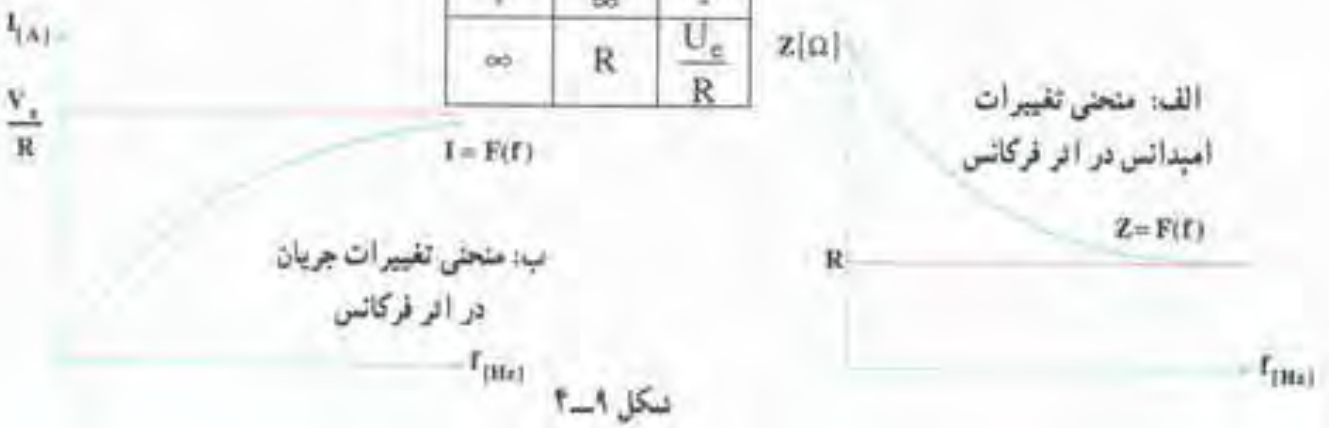
$$f=0 \Rightarrow Z=\sqrt{R^2+\left(\frac{1}{2\pi C\times(0)}\right)^2}=\infty \quad , \quad I=\frac{V}{Z}=\frac{V}{\infty}=0$$

اگر فرکانس از صفر به بی‌نهایت تغییر کند، امپدانس مدار کاهش یافته و جریان افزایش می‌یابد ؛ به‌گونه‌ای که در فرکانس بی‌نهایت مقدار $X_C=0$ و امپدانس مدار $Z=R$ و $I=\frac{V}{R}$ می‌شود. دلیل این‌که خازن اتصال کوتاه می‌شود، تغییرات سریع پلاریته‌ی صفحات آن در فرکانس‌های زیاد است. خازن با وجود این تغییرات سریع نمی‌تواند عکس‌العمل نشان دهد و جریان به‌راحتی از آن عبور می‌کند. بنابراین :

$$f\to\infty \Rightarrow Z=\sqrt{R^2+\left(\frac{1}{2\pi C\times(\infty)}\right)^2}=\sqrt{R^2}=R \quad , \quad I=\frac{V}{R}$$

ضریب کیفیت مدار $Q=\frac{1}{RC\omega}=\frac{1}{2\pi fCR}$ در فرکانس‌های کم‌تر خیلی بالا و در فرکانس بی‌نهایت به سمت صفر میل می‌کند. منحنی تغییرات جریان و ولتاژ مدار R - C را در فرکانس‌های متغیر می‌توان به‌صورت شکل‌های ۹ــ۴ از طریق نقطه‌یابی رسم کرد .

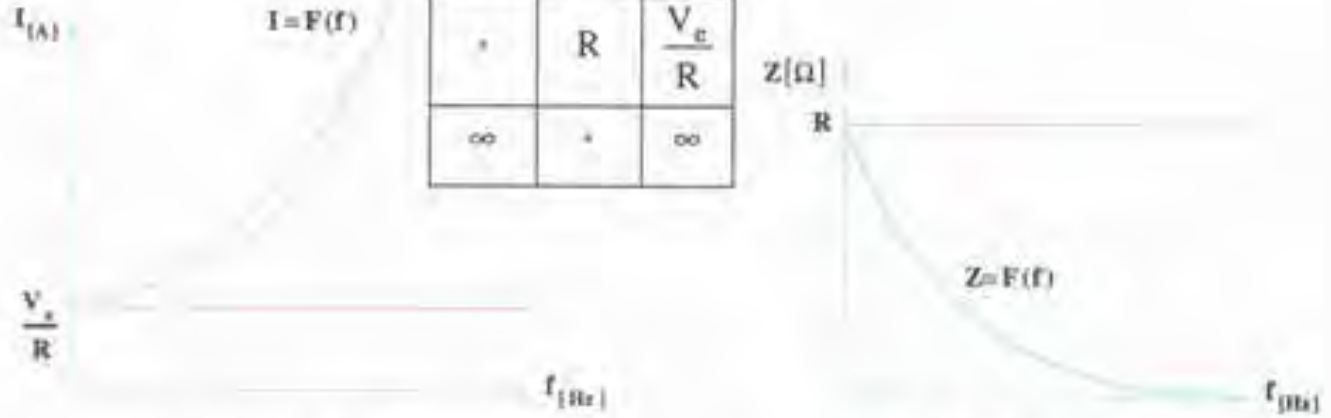
$f_{[Hz]}$	$Z_{[\Omega]}$	$I_{[A]}$
۰	∞	۰
∞	R	$\frac{U_e}{R}$



شکل ۹ــ۴

۲ــ۴ــ۴ــ تأثیر فرکانس در مدار R - C موازی : در شکل ۶ــ۴ فرض می‌کنیم فرکانس منبع تغذیه در دامنه‌ی ثابت تغییر کند و در این تغییرات مقدار عناصر R و C ثابت باشند. اگر فرکانس مدار صفر باشد، خازن شاخه‌ی موازی مربوط به خود را در اثر شارژ در حالت دائمی باز می‌کند و جریان $I_c = 0$ می‌شود. در این حالت، جریان مدار برابر جریان I_R خواهد شد و امپدانس $Z = R$ می‌شود. اگر فرکانس $f = \infty$ شود، شاخه‌ی خازنی اتصال کوتاه می‌کند و جریان I_c بی‌نهایت می‌شود. دراین‌حالت $Z = 0$ خواهد بود. منحنی تغییرات جریان و امپدانس در R - C موازی نسبت به تغییرات فرکانس مطابق شکل ۱۰ــ۴، از طریق نقطه‌یابی رسم می‌شود .

$f_{[Hz]}$	$Z_{[\Omega]}$	$I_{[A]}$
0	R	$\frac{V_c}{R}$
∞	0	∞



الف : منحنی تغییرات $Z = F(f)$ ب : منحنی تغییرات $I = F(f)$

شکل ۱۰ــ۴ــ تأثیر فرکانس بر مقادیر Z و I در R-C موازی

۵ــ۴ــ تمرین‌ها

۱ــ یک مقاومت $R = 10\Omega$ با یک خازن به راکتانس $X_C = 10\sqrt{3}\Omega$ به‌صورت سری به یک منبع ولتاژ با معادله‌ی $v = 100\sin 2500t$ متصل است. مطلوب است :

الف : معادله‌ی جریان منبع.

ب : معادله‌ی ولتاژ دو سر هر المان.

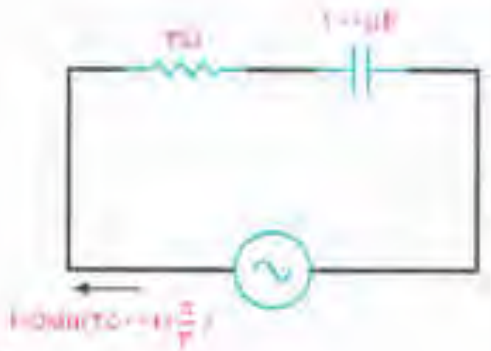
پ : توان‌های مصرفی و مثلث توان.

۲ــ در مدار مقابل مطلوب است :

الف : معادله‌ی ولتاژ منبع.

ب : معادله‌ی ولتاژ دو سر هر المان.

پ : رسم دیاگرام برداری ولتاژ و جریان.



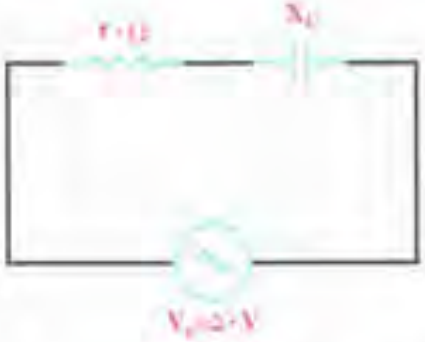
۳ـ در یک مدار R – C سری معادله‌ی ولتاژ و جریان منبع به‌ترتیب $v=۱۰۰\sin(۲۵۰۰t-\frac{\pi}{۳})$ و $i=۲\sin(۲۵۰۰t+\frac{\pi}{۶})$ می‌باشد. اندازه‌ی R و C چه‌قدر است؟

۴ـ یک خازن با راکتانس $X_C=۵\Omega$ با یک مقاومت نا مشخص به‌طور سری به هم متصل‌اند. معادله‌ی ولتاژ دو سر خازن $V_C=۲۵\sin(۲۰۰۰t+\frac{\pi}{۲})$ ولت است. اگر جریان به‌اندازه‌ی $\frac{\pi}{۳}$ رادیان از ولتاژ جلو باشد، مقدار R چند اهم است؟

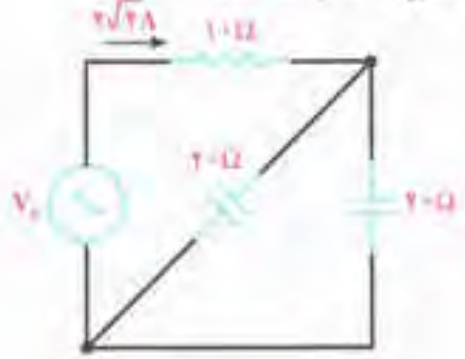
۵ ـ در مدار شکل زیر اگر $Z=۵\Omega$ باشد، اندازه‌ی R چند اهم است؟

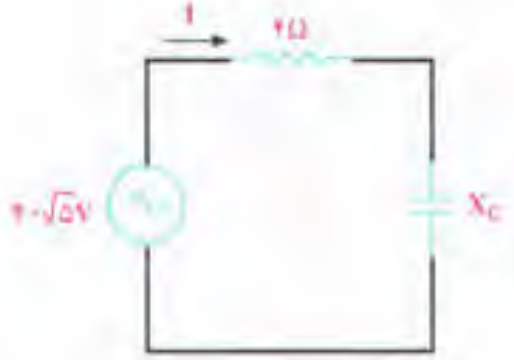
۶ـ خازنی به‌ظرفیت $۱۰۰\mu F$ با یک مقاومت ۲۰Ω سری شده‌اند. در چه فرکانسی ضریب کیفیت مدار $\frac{۵}{\pi}$ می‌شود؟

۷ـ در مدار شکل زیر، ولتاژ دو سر خازن $V_C=۳۰V$ است. ضریب توان و اندازه‌ی X_C چند اهم است؟



۸ ـ در مدار زیر ولتاژ منبع چند ولت است؟

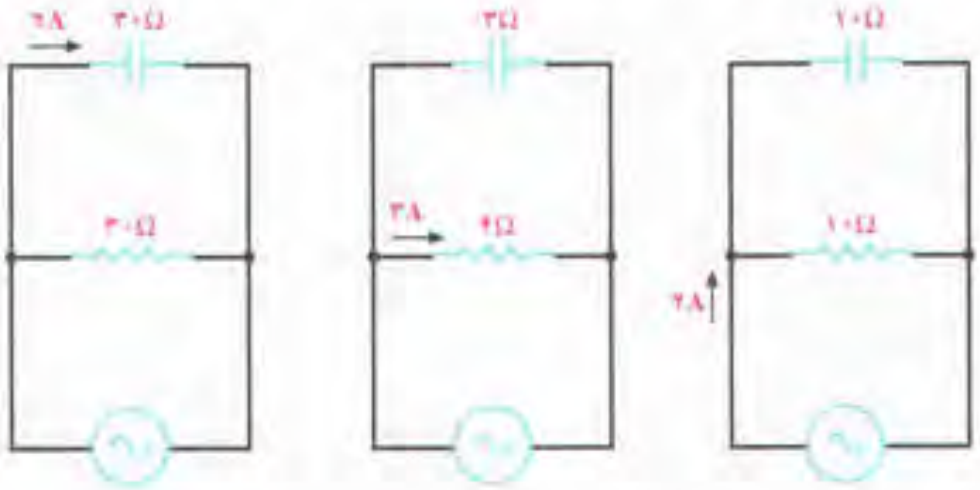




۹ـ ضریب کیفیت‌مدار روبه‌رو $Q = ۲$ است.
جریان مدار چند آمپر است؟

۱۰ـ مدار RC موازی شکل روبه‌رو را به یک مدار RC سری تبدیل کنید.

۱۱ـ در هر یک از مدارهای زیر مطلوب است :
الف : معادله‌ی جریان و ولتاژ منبع.
ب : توان‌های مصرفی و رسم مثلث توان.
پ : رسم دیاگرام برداری $\vec{V}$ و $\vec{I}$.



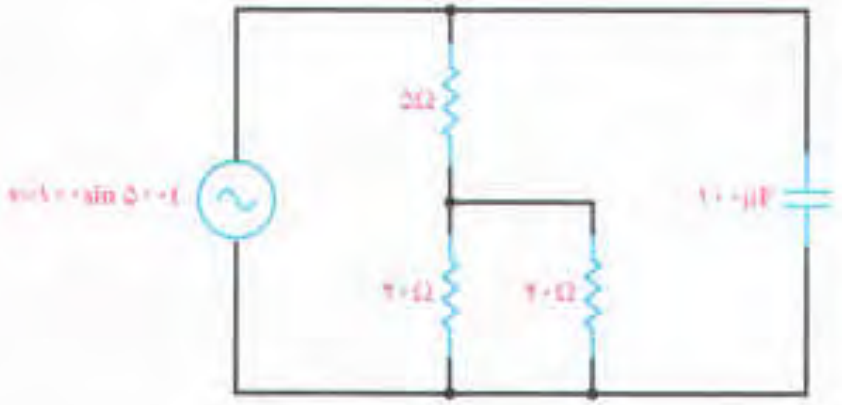
۱۲ـ در یک مدار R - C موازی معادله‌ی ولتاژ و جریان به‌ترتیب $v = ۲۰۰\sin ۱۰۰۰t$ و $i = ۱۰\sin(۱۰۰۰t + \frac{\pi}{۴})$ می‌باشد. اندازه‌ی R و C چه‌قدر است؟

۱۳ـ در مدار شکل مقابل مطلوب است :
الف : جریان هر شاخه و معادلات زمانی آن‌ها.
ب : درصورت دو برابر شدن فرکانس، بند الف را محاسبه کنید.
پ : درصورت نصف شدن فرکانس، بند الف را محاسبه کنید.
ت : جواب‌های بند الف، ب و پ را مقایسه کنید.

۱۴ـ در مدار شکل زیر مطلوب است :

الف : امپدانس کل مدار.

ب : ضریب قدرت شبکه.



فصل پنجم

مدارهای L - C جریان متناوب

هدف‌های رفتاری: در پایان این فصل، از دانش‌آموز انتظار می‌رود :

۱ــ منحنی‌ها و دیاگرام برداری جریان، ولتاژ، توان‌ها و مقاومت ظاهری در مدار L-C سری و موازی را رسم کند.

۲ــ مقادیر مقاومت ظاهری، اختلاف فاز، جریان ولتاژ و توان‌ها را در مدارهای L-C سری و موازی محاسبه کند.

۳ــ مفهوم رزنانس را شرح دهد و فرکانس رزنانس را در مدارهای L-C سری و موازی محاسبه کند.

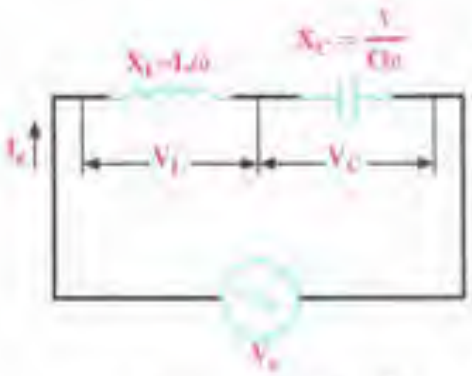
۴ــ منحنی تغییرات امپدانس Z و جریان I، مدارهای L-C سری و موازی را در تغییرات فرکانس رسم کند.

۱ــ ۵ــ مقدمه

تولید امواج الکتریکی در نوسان‌سازها، تنظیم ایستگاه‌های رادیویی و تلویزیونی بر روی موج فرستنده‌ها، تصحیح ضریب توان شبکه‌های قدرت از جمله موارد کاربرد مدارهای L-C است. در بررسی مدار یک سلف و یک خازن آموختیم که این عناصر رفتار متقابل دارند ؛ زیرا در سلف جریان از ولتاژ ۹۰° عقب‌تر است ؛ در صورتی که جریان در خازن از ولتاژ ۹۰° جلوتر است. این امر باعث می‌شود رفتار خازن نسبت به رفتار سلف ۱۸۰° الکتریکی اختلاف فاز پیدا کند و با هم رفتار متقابل داشته باشند. از آن‌جا که هردو عنصر در شبکه توان راکتیو مبادله می‌کنند، به مناسبت اثر متقابل آن‌ها می‌توان توان راکتیو شبکه را کاهش داد و مقدار آن را به صفر رساند. مدارهای L-C در شبکه‌ها به‌صورت اتصال سری یا اتصال موازی به کار گرفته می‌شوند. بدین منظور، اتصال سری یا موازی مدارهای L-C را به طور جداگانه بررسی می‌کنیم.

۲ــ۵ــ مدار L - C سری

مدار الکتریکی مدار L-C سری که از یک عنصر خالص خازنی و یک عنصر خالص سلفی تشکیل می‌شود،مطابق شکل ۱ــ۵ است. در این مدار، جریان هر دو عنصر یکسان است. اگر برای رسم دیاگرام برداری، جریان را مبنا قرار دهیم ولتاژ دو سر سلف از جریان ۹۰° جلوتر و ولتاژ دو سر خازن از جریان ۹۰° عقب‌تر خواهد بود. دیاگرام برداری ولتاژ مطابق شکل ۲ــ۵ رسم می‌شود.



شکل ۱ــ۵ــ مدار L-C سری

شکل ۲ــ۵ــ دیاگرام برداری مدار L-C سری

۱ــ۲ــ۵ــ محاسبه‌ی امپدانس مدار L-C سری: از شکل ۱ــ۵ می‌توان مقادیر ولتاژهای V_L و V_C به دست آورد.

$$V_L = I_e . X_L = I_e . L\omega \qquad (۵ــ۱)$$

$$V_C = I_e . X_C = I_e \times \frac{1}{C\omega} \qquad (۵ــ۲)$$

از شکل ۲ــ۵ دیاگرام برداری ولتاژها و شکل ۱ــ۵ مدار L-C سری می‌توان نوشت :

$$\vec{V}_e = \vec{V}_L + \vec{V}_C \quad , \quad V_e = I_e . Z$$

$$V_e = V_L - V_C \qquad (۵ــ۳)$$

با درنظرداشتن روابط ۱ــ۵ و ۲ــ۵ در رابطه‌ی ۳ــ۵ خواهیم داشت :

$$I_e \times Z = X_L . I_e - X_C \times I_e$$

$$\boxed{Z = |X_L - X_C| = \left| L\omega - \frac{1}{C\omega} \right|} \qquad (۵ــ۴)$$

۲ــ۲ــ۵ــ محاسبه‌ی توان‌ها: همان‌طور که مشاهده می‌کنید، در دیاگرام شکل ۲ــ۵ قسمت حقیقی دیاگرام برداری برابر صفر است. بنابراین، اختلاف فاز جریان و ولتاژ همواره ۹۰° خواهد بود؛ یعنی، اگر $X_L > X_C$ باشد $\varphi = 90^\circ$ پیش فاز و اگر $X_L < X_C$ باشد، $\varphi = 90^\circ$ پس فاز خواهد بود. پس ضریب توان مؤثر $\cos\varphi = 0$ و $\sin\varphi = \pm 1$ است. وقتی ضریب توان مؤثر صفر شد، در مدار L-C هیچ‌گونه توان اکتیو مصرف نمی‌شود. بنابراین:

$$P_e = V_e I_e \cos\varphi = 0 \qquad (۵ــ۵)$$

برای تعیین توان راکتیو می‌توان نوشت:

$P_{d_L} = I_e^2 X_L$ برای سلف

$P_{d_C} = -I_e^2 X_C$ برای خازن

$$P_d = P_{d_L} + P_{d_C} = I_e^2 X_L - I_e^2 X_C$$

$$P_d = I_e^2 (X_L - X_C) \qquad (۵ــ۶)$$

رابطه‌ی ۶ــ۵ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$P_d = \pm V_e I_e \sin\varphi = \pm V_e I_e \sin 90^\circ = \pm V_e I_e \quad V.A.R \qquad (۵ــ۷)$$

از آن‌جا که $P_s = V_e I_e$ است، بنابراین:

$$\boxed{P_s = |P_d| = V_e . I_e} \qquad (۵ــ۸)$$

۳ــ۲ــ۵ــ رسم منحنی‌های مدارهای L-C سری: فرض می‌کنیم جریان متناوبی با معادله‌ی $i = I_m \sin(\omega t)$ مدار شکل ۱ــ۵ را تغذیه می‌کند.

معادله‌ی زمانی ولتاژ دو سر سلف به صورت $v_L = X_L . I_m \sin(\omega t + 90^\circ)$ و ولتاژ دو سر خازن به صورت $v_C = X_C . I_m \sin(\omega t - 90^\circ)$ خواهد شد. ولتاژ منبع همواره از جمع جبری دو ولتاژ لحظه‌ای v_L و v_C به دست می‌آید. بنابراین، ولتاژ کل با فرض $X_L > X_C$ برابر است با:

$$v = X_L . I_m \sin(\omega t + 90^\circ) + X_C . I_m \sin(\omega t - 90^\circ) \qquad (۵ــ۹)$$

با توجه به این‌که $\sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) = \cos\alpha$ و $\sin(\alpha - \frac{\pi}{2}) = -\cos\alpha$ است. رابطه‌ی ۹ــ۵ به صورت زیر بیان می‌شود:

$$v = (X_L - X_C) I_m \cos\omega t = I_m (X_L - X_C) \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

$$v = V_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) \qquad (۵ــ۱۰)$$

توجه: اگر $X_L < X_C$ باشد، ولتاژ به صورت زیر بیان می‌شود:

$$v = V_m \sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

برای تعیین تابع تغییرات توان مدار L-C از حاصل‌ضرب لحظه‌ای i و V استفاده می‌کنیم.

$$P = v.i = V_m \sin\omega t \times I_m (X_L - X_C)\cos\omega t$$

$$V_m = I_m (X_L - X_C)$$

$$P = I_m V_m \sin\omega t \cos\omega t = \sqrt{2} I_e \times \sqrt{2} V_e \sin\omega t \cos\omega t$$

$$P = I_e V_e \times 2\sin\omega t \times \cos\omega t$$

چون $\sin 2\omega t = 2\sin\omega t \times \cos\omega t$ است، بنابراین:

$$P = I_e V_e \sin 2\omega t \qquad (5\_11)$$

از رابطه‌ی ۱۱ــ۵ می‌توان نتیجه گرفت که توان راکتیو در مدارهای L-C با دو برابر فرکانس شبکه تغییر خواهد کرد. در شکل ۳ــ۵ منحنی تغییرات ولتاژها و توان و جریان رسم شده است.

مثال ۱ــ۵: یک مدار L - C سری $L = 0/05H$ و خازن C مفروض است. اگر معادله‌ی ولتاژ $v = 100\sin 500t$ و معادله‌ی جریان $i = 2\sin(500t + 90^\circ)$ باشد، ظرفیت خازن C چه‌قدر است؟

راه‌حل:

$$Z = \frac{V_m}{I_m} = \frac{100}{2} = 50\Omega$$

چون جریان از ولتاژ پیش فاز است، مدار در مجموع خاصیت خازنی دارد و راکتانس X_C از راکتانس X_L بزرگ‌تر است.

$$Z = X_C - X_L$$

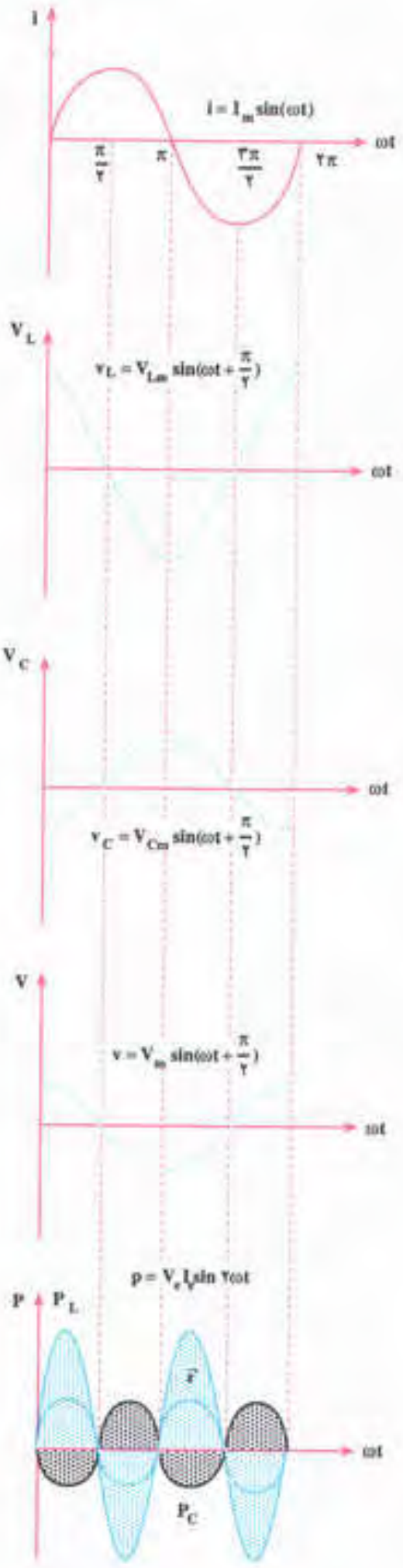
$$X_L = L\omega = 0/05 \times 500 = 25\Omega$$

$$50 = X_C - 25 \Rightarrow X_C = 75\Omega$$

$$X_C = \frac{1}{C\omega} \Rightarrow C = \frac{1}{\omega X_C}$$

$$C = \frac{1}{500 \times 75} = 2/66 \times 10^{-5} F$$

$$C = 26/6\mu F$$


منحنی جریان
I
$i = I_m \sin(\omega t)$
ωt
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$
2π
منحنی ولتاژ سلف
V_L
$v_L = V_{Lm} \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$
ωt
منحنی ولتاژ خازن
V_C
ωt
$v_C = V_{Cm} \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$
منحنی ولتاژ منبع
V
$v = V_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$
ωt
منحنی توان‌ها
$p = V_e I_e \sin 2\omega t$
P
P_L
$\bar{P}$
ωt
P_C

شکل ۳ــ۵

۳ـ۲ـ۵ـ تشدید (رزنانس)[۱] در مدار L - C سری: در رابطه‌ی ۴ـ۵، امپدانس یک مدار L-C سری را به صورت $Z = L\omega - \frac{۱}{C\omega}$ محاسبه کردیم. چون $\omega = ۲\pi f$ است، بنابراین $Z = ۲\pi fL - \frac{۱}{۲\pi fc}$ نیز بیان می‌شود. مقدار امپدانس Z با تغییر فرکانس (f) شبکه و مقادیر C و L تغییر می‌کند. از آن‌جا که ظرفیت خازن $C = \frac{KA}{d}$ و اندوکتانس یک سلف $L = \frac{\mu_۰\mu_r N^۲ A}{l}$ است، با تغییر فاصله‌ی دوصفحه‌ی خازن، تغییر مقدار سطح مؤثر صفحات خازن یا تغییر ضریب دی‌الکتریک می‌توان ظرفیت خازن را تغییر داد. در اندوکتانس یک سلف،تغییر دور و سطح مقطع حلقه‌ها و طول مؤثر بوبین (سلف) و ضریب نفوذ مغناطیسی، مقدار L را تغییر می‌دهد. در هر صورت، با تغییر کمیّت‌های f و L و C می‌توان وضعیتی ایجاد کرد که $۲\pi fL$ برابر $\frac{۱}{۲\pi fc}$ شود. در این حالت، اندازه‌ی کمیّت Z برابر صفر می‌شود و حداکثر جریان در مدار L-C سری جاری خواهد شد. این جریان، با جریان اتصال کوتاه مدار L-C برابر است و سلف و خازن با هم مدار را به اتصال کوتاه می‌کشانند. این حالت از وضعیت مدار L - C سری را که $Z = ۰$ یا $L.\omega = \frac{۱}{C.\omega}$ می‌شود، **حالت تشدید** یا **رزنانس** گویند. در حالت تشدید خواهیم داشت:

$$Z = L\omega - \frac{۱}{C\omega} = ۲\pi fL - \frac{۱}{۲\pi fc} = ۰ \qquad (۵ـ۱۲)$$

$$L\omega = \frac{۱}{C\omega} \Rightarrow L\omega^۲C = ۱ \qquad (۵ـ۱۳)$$

اگر در مدار L-C سری L و C ثابت باشند، با تغییرات فرکانس f وضعیت تشدید ایجاد می‌شود. به فرکانسی که وضعیت تشدید را ایجاد می‌کند، **فرکانس رزنانس یا فرکانس تشدید** می‌گویند و آن‌را با f_r نشان می‌دهند. از رابطه‌ی ۱۳ـ۵ فرکانس تشدید به صورت روابط زیر محاسبه می‌شود:

$$L\omega^۲C = ۱ \quad , \quad \omega = ۲\pi f_r$$

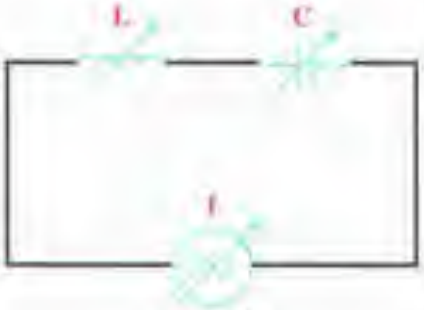
$$L(۲\pi f_r)^۲C = ۱ \Rightarrow (۲\pi f_r)^۲ = \frac{۱}{LC}$$

$$۲\pi f = \frac{۱}{\sqrt{LC}}$$

$$f_r = \frac{۱}{۲\pi\sqrt{LC}} \qquad (۵ـ۱۴)$$

در رابطه‌ی ۱۴ـ۵، C بر حسب فاراد و L برحسب هانری و f_r بر حسب هرتز است.

۱ـ Resonance



شکل ۴ـ۵

مثال ۲ـ۵: مدار L-C سری، مطابق شکل ۴ـ۵ مفروض است. همان طورکه مشاهده می‌کنید، هر سه کمیت f و C و L در مدار قابل تغییر است. اگر فرکانس باشد، مطلوب است:

۱ـ مقدار اندوکتانس L که در $f = ۱۰۰Hz$ تشدید ایجاد کند.

۲ـ اندازه‌ی ظرفیت خازن C که در $L = ۱۰mH$ تشدید ایجاد کند.

۳ـ فرکانسی که در $L = ۱۰mH$ و $C = ۱۰۰\mu F$ مدار را به حالت رزنانس می‌کشاند.

راه‌حل:

۱ـ $$X_C = X_L \Rightarrow ۲\pi fL = \frac{۱}{۲\pi fc} \Rightarrow L = \frac{۱}{۴\pi^۲ f^۲ c}$$

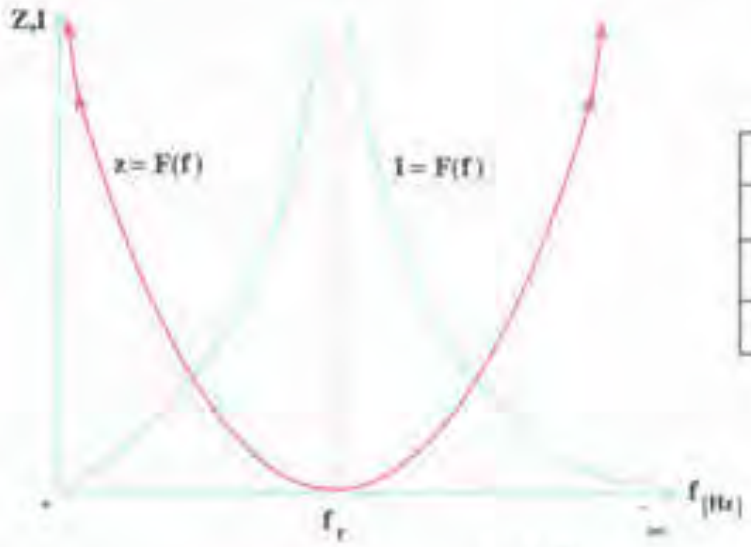
$$L = \frac{۱}{۴\times\pi^۲\times۱۰۰^۲\times۱۰۰\times۱۰^{-۶}} = ۲۵/۳۵mH$$

۲ـ $$C = \frac{۱}{۴\pi^۲ f^۲ L} = \frac{۱}{۴\pi^۲\times۱۰۰^۲\times۱۰\times۱۰^{-۳}} = ۲۵۳/۵\mu F$$

۳ـ $$f_r = \frac{۱}{۲\pi\sqrt{LC}} = \frac{۱}{۲\pi\sqrt{۱۰\times۱۰^{-۳}\times۱۰۰\times۱۰^{-۶}}} = ۱۵۹/۲۳Hz$$

۴ـ۲ـ۵ـ تأثیر فرکانس در امپدانس و جریان مدار L - C سری: در مدار L-C، با توجه به رابطه‌ی $Z = ۲\pi fL - \frac{۱}{۲\pi fc}$ اگر فرکانس $f = ۰$ شود، امپدانس Z بی‌نهایت می‌شود؛ زیرا مقدار $۲\pi fL = ۰$ و $\frac{۱}{۲\pi fc} = \infty$ خواهد شد. به عبارت دیگر، وقتی فرکانس برابر صفر است، یعنی مدار از جریان DC تغذیه می‌کند و خازن در جریان DC در حالت پایدار نقش مدار باز را خواهد داشت. اگر امپدانس $Z = \infty$ شود، هیچ نوع جریانی از مدار عبور نمی‌کند و $I = ۰$ خواهد شد. وقتی فرکانس برابر f_r فرکانس تشدید می‌شود، $Z = ۰$ شده و جریان I به مقدار ∞ (جریان اتصال کوتاه) می‌رسد. اگر $f = \infty$ شود، تغییرات بار الکتریکی در صفحات خازن خیلی شدید می‌شود و خازن عملاً به اتصال کوتاه کشانده شده و $\frac{۱}{۲\pi fc} = ۰$ خواهد شد. در عوض، $۲\pi fL$ به مقدار خیلی زیاد ـ یعنی ∞ میل کرده و مدار L-C را عملاً باز می‌کند. در این حالت، امپدانس L-C مجدداً بی‌نهایت

می‌شود. چون $I=\frac{U}{Z}$ است، جریان صفر خواهد شد. نمودار تغییرات $Z=F(f)$ و $I=F(f)$ در شکل ۵ـ۵ رسم شده است.

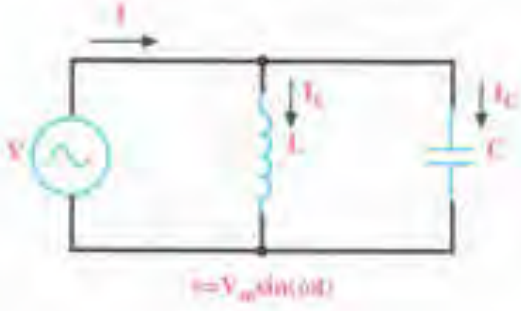


F	Z	I
۰	∞	۰
f_r	۰	∞
∞	∞	۰

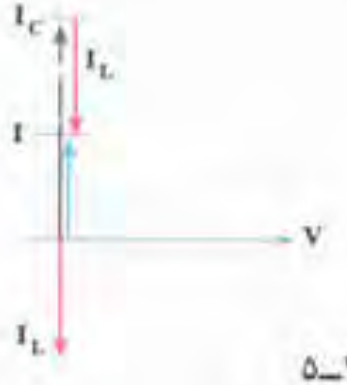
شکل ۵ـ۵

۳ـ۵ـ مدار L - C موازی

مدار الکتریکی L-C موازی در شکل۶ـ۵ نشان داده شده است. در این مدار، ولتاژ دو سر هر دو عنصر C و L با هم برابرند. جریان در داخل مقاومت سلفی (I_L) از ولتاژ شبکه به اندازه‌ی ۹۰° عقب‌تر و جریان خازنی (I_C) از ولتاژ ۹۰° جلوتر است. جریان کل I از جمع برداری دو جریان $\vec{I_L}$ و $\vec{I_C}$ به‌دست می‌آید. چون دو جریان $\vec{I_L}$ و $\vec{I_C}$ دارای یک راستا هستند و ۱۸۰ درجه اختلاف فاز دارند، می‌توان جریان I (جریان کل) را از تفاضل $I=I_C-I_L$ به‌دست آورد. دیاگرام برداری جریان‌های مدار L-C موازی در مبنای ولتاژ در شکل ۷ـ۵ رسم شده است.



شکل ۶ـ۵



شکل ۷ـ۵

۱ـ۳ـ۵ـ محاسبه‌ی امپدانس مدار L-C موازی: از شکل‌های ۶ـ۵ و ۷ـ۵ برای محاسبه‌ی امپدانس می‌توان نوشت:

$$I_L=\frac{V}{X_L} \quad , \quad I_C=\frac{V}{X_C} \quad , \quad Z=\frac{V}{I} \quad , \quad I=\frac{V}{Z}$$

$$I=I_C-I_L \Rightarrow \frac{V}{Z}=\frac{V}{X_C}-\frac{V}{X_L}$$

با فرض $X_L > X_C$

$$\frac{1}{Z}=\frac{1}{X_C}-\frac{1}{X_L} \rightarrow \text{یا} \quad Z=\frac{X_L.X_C}{X_L-X_C} \qquad (۵ـ۱۵)$$

درصورتی‌که $X_C > X_L$ باشد، در رابطه‌ی ۱۵ـ۵ جای X_L و X_C با هم عوض می‌شود.

۲ـ۳ـ۵ـ فرکانس تشدید در مدار L-C موازی: در شکل ۷ـ۵، دیاگرام برداری اگر $I_C = I_L$ باشد، اندازه‌ی جریان I برابر صفر می‌شود. خاصیت سلفی به‌وسیله‌ی خاصیت خازنی مدار کاملاً خنثی شده و حالت تشدید (رزنانس) برقرار می‌شود. در حالت تشدید می‌توان نوشت:

$$I_L = I_C$$

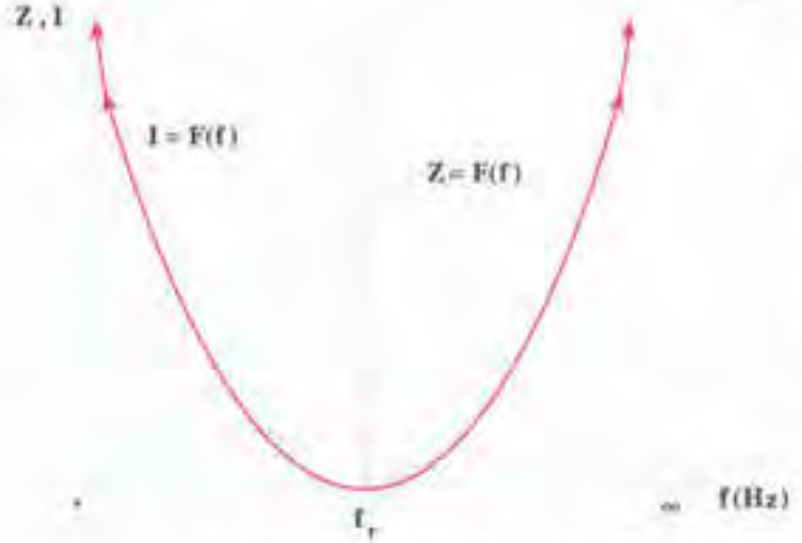
$$\frac{V}{X_L}=\frac{V}{X_C} \Rightarrow \frac{1}{X_L}=\frac{1}{X_C} \Rightarrow X_L = X_C$$

$$L\omega=\frac{1}{C\omega} \Rightarrow L\omega^2C=1 \quad , \quad \omega=2\pi f$$

$$L(2\pi f_r)^2C=1 \Rightarrow f_r=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \qquad (۵ـ۱۶)$$

۳ـ۳ـ۵ـ منحنی تغییرات امپدانس و جریان در فرکانس‌های متغیر: امپدانس مدار L-C با توجه به رابطه‌ی $\frac{1}{Z}=\frac{1}{2\pi fL}-\frac{1}{\frac{1}{2\pi fc}}$ وقتی فرکانس مدار صفر است (زمانی که از جریان DC تغذیه می‌شود) برابر صفر خواهد شد؛ زیرا $X_L = 2\pi fL = 0$ است و مدار را به اتصال کوتاه می‌کشاند. در این حالت، از مدار جریان $I_{S.C}$ (جریان اتصال کوتاه) عبور خواهد کرد. در فرکانس $f = f_r$ (یعنی فرکانس تشدید) $X_L = X_C$ شده و $\frac{1}{Z}=0$ می‌شود. به عبارت دیگر، امپدانس مدار بی‌نهایت می‌شود و به عنوان مدار باز عمل می‌کند. در فرکانس‌های خیلی زیاد، زمانی که فرکانس به

بی‌نهایت میل می‌کند، خازن به علت تغییرات شدید بار، اتصال کوتاه شده و مدار را به اتصال کوتاه می‌کشاند و $Z=0$ می‌شود. مجدداً جریان مدار به جریان $I_{S.C}$ می‌رسد. نمودار تغییرات امپدانس و جریان در شکل ۸ــ۵ رسم شده است.



F	Z	I
0	0	∞
f_r	∞	0
∞	0	∞

شکل ۸ ــ۵ــ منحنی تغییرات $Z=F(f)$ و $I=F(f)$ در مدار L-C موازی

توجه: از بررسی حالت رزنانس L-C سری و موازی می‌توان نتیجه گرفت که در رزنانس مدار سری دو سر L-C اتصال کوتاه می‌شود و در رزنانس L-C موازی در قسمت L-C، مدار بازمی‌شود.

مثال ۳ــ۵: در یک مدار L-C موازی، ولتاژ و جریان مدار به صورت $v=50\sin(3000t+45)$ و $i=2\sin(3000t-45^\circ)$ است. اگر شدت جریان در L پنج برابر شدت جریان شاخه‌ی مدار C باشد، مطلوب است:

۱ــمقادیر C و L.

۲ــفرکانس تشدید.

راه حل:

$$I_L=5I_C \quad , \quad I_L=\frac{V_e}{X_L} \quad , \quad I_C=\frac{V_e}{X_C} \quad , \quad I_e=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}A$$

۱ــ

$$I_L=\frac{\frac{50}{\sqrt{2}}}{X_L} \quad , \quad I_C=\frac{\frac{50}{\sqrt{2}}}{X_C} \Rightarrow \frac{\frac{50}{\sqrt{2}}}{X_L}=\frac{5\times\frac{50}{\sqrt{2}}}{X_C} \Rightarrow X_C=5X_L$$

$$Z=\frac{V_m}{I_m}=\frac{50}{2}=25\Omega \quad , \quad \frac{1}{Z}=\frac{1}{X_C}-\frac{1}{X_L} \Rightarrow \frac{1}{25}=\frac{1}{X_L}-\frac{1}{X_C}$$

$$\frac{1}{25}=\frac{1}{X_L}-\frac{1}{5X_L} \Rightarrow X_L=20\Omega \quad , \quad X_C=5\times20=100\Omega$$

$$L=\frac{X_L}{\omega}=\frac{20}{3000}=6/67mH$$

۲ـ $C=\frac{۱}{X_C\omega}=\frac{۱}{۱۰۰\times۳۰۰۰}=۳/۳۳\mu F$

$f_r=\frac{۱}{۲\pi\sqrt{LC}}=\frac{۱}{۲\pi\sqrt{۶/۶۷\times۱۰^{-۳}\times۳/۳۳\times۱۰^{-۶}}}=۱۰۶۸/۴۵\ Hz$

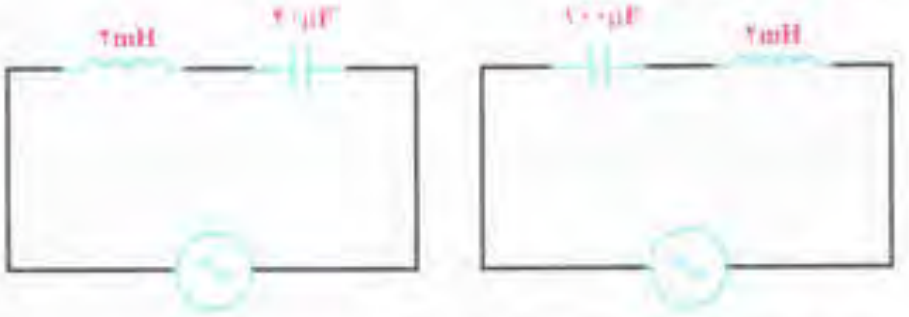
۴ـ۵ـ تمرین‌ها

۱ـ در مدارهای شکل زیر اگر $v=۱۰\sqrt{۲}\sin۲۵۰۰t$ باشد، مطلوب است :

الف : معادله‌ی جریان ب : معادله‌ی ولتاژ دو سر L و C

پ : توان‌های مدار ت : فرکانس رزُنانس

ث : رسم دیاگرام برداری ولتاژها

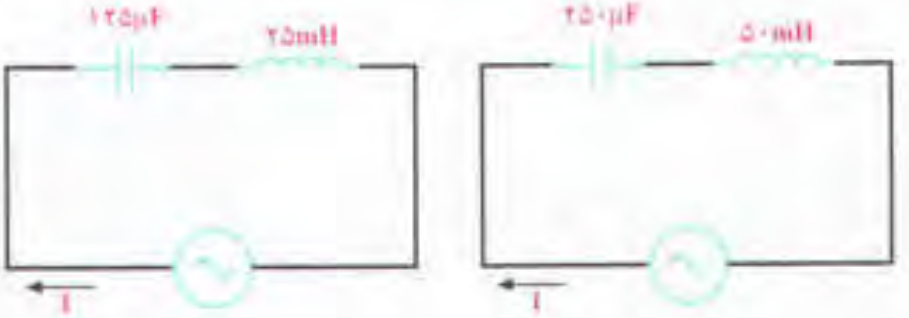


۲ـ در هریک از مدارهای شکل زیر اگر $I=۵\sin۴۰۰t$ باشد، مطلوب است :

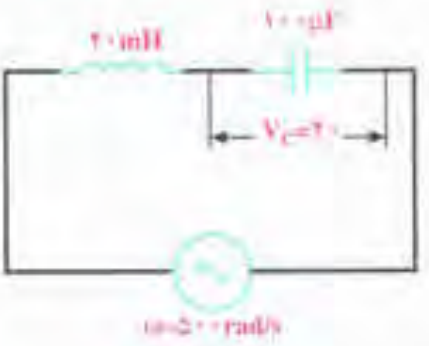
الف : معادله‌ی ولتاژ دو سر L و C ب : معادله‌ی ولتاژ منبع

پ : توان‌های مدار ت : فرکانس رزنانس

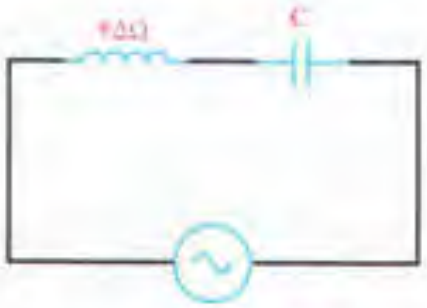
ث : رسم دیاگرام برداری ولتاژها



۳ـ در مدار شکل مقابل معادله‌ی ولتاژ و جریان منبع را به دست آورید.



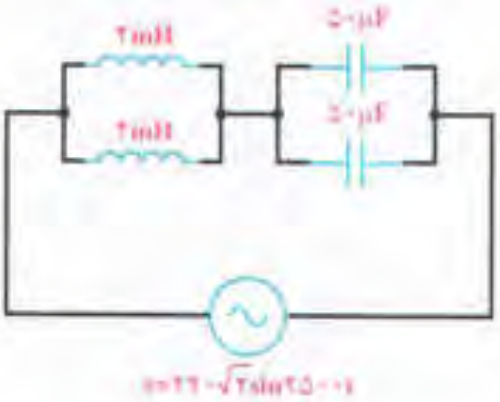
۴ــ در مدار شکل مقابل اگر ولتاژ و جریان منبع به ترتیب $v=۱۰۰\sin ۵۰۰t$ و $i=۲\sin(۵۰۰t+\frac{\pi}{۲})$ باشد، مقدار C را محاسبه کنید.



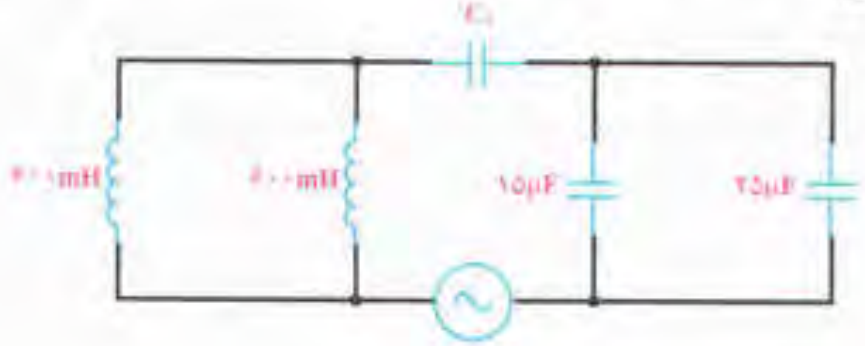
۵ــ در مدار شکل مقابل مطلوب است :

الف : معادله‌ی جریان منبع

ب : معادله‌ی ولتاژ دو سر هر المان



۶ــ در مدار شکل زیر با $W=۵۰۰rad/s$ مدار در حالت تشدید است. ظرفیت $C_۱$ چند میکروفاراد است؟



۷ــ در مدارهای شکل زیر اگر $v=۱۰۰\sin ۲۵۰۰t$ باشد، مطلوب است :

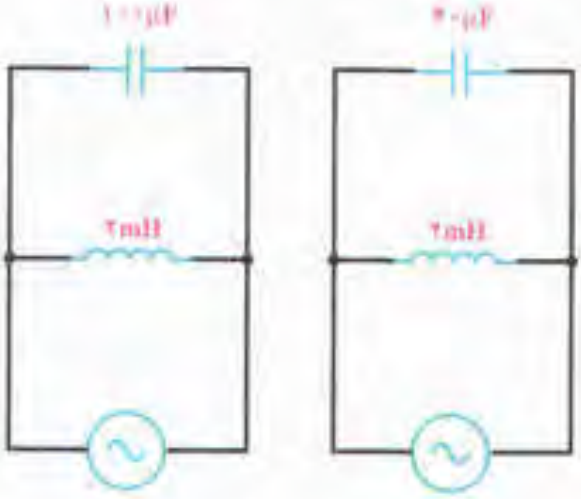
الف : معادله‌ی جریان دوشاخه

ب : معادله‌ی جریان منبع

پ : توان‌های مدار

ت : فرکانس رزنانس

ج : رسم دیاگرام برداری جریان‌ها



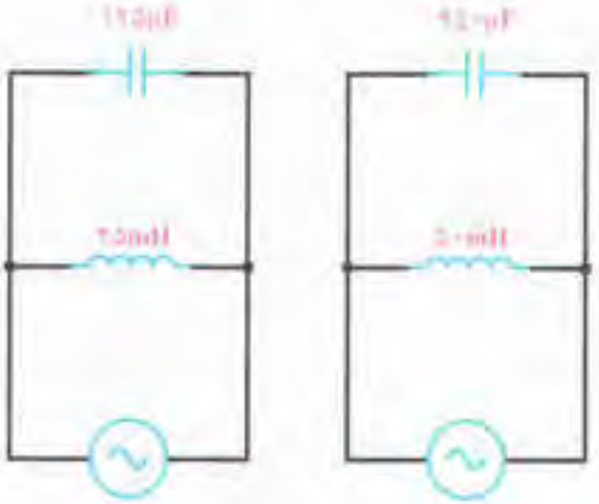
۸ــ در مدار شکل مقابل اگر $i = 5\sin 400t$ باشد، مطلوب است :

الف : معادله‌ی ولتاژ منبع

ب : جریان هر شاخه و معادله‌ی آن

پ : توان‌های مدار

ت : فرکانس رزنانس



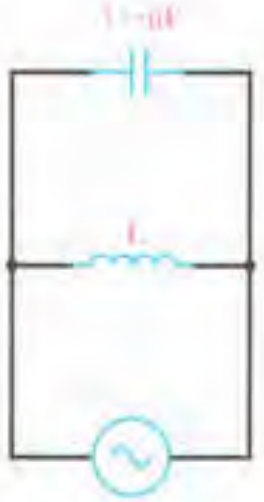
۹ــ در مدار شکل مقابل اگر $i_c = 2\sqrt{2}\sin 2500t$ باشد مطلوب است :

الف : معادله‌ی ولتاژ منبع

ب : معادله‌ی جریان منبع

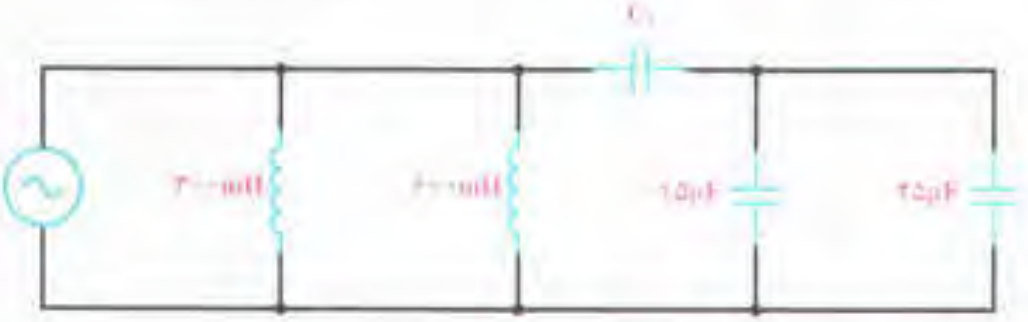
پ : رسم دیاگرام برداری مدار

۱۰ــ مدار شکل مقابل به‌ازای $\omega = 4000 rad/s$ به حالت تشدید می‌رود. مقدار L چند میلی هانری است؟



۱۱ــ در یک مدار L-C موازی $I_C = 5I_L$ و معادله‌ی ولتاژ و جریان به ترتیب $v = 100\sin 2500t$ و $i = 8\sin(2500t + \frac{\pi}{2})$ است. اندازه‌ی L و C چه‌قدر است؟

۱۲ـ مدار شکل زیر به‌ازای $\omega = ۵۰۰ rad/s$ به حالت رزنانس می‌رود. ظرفیت C_1 را محاسبه کنید.



۱۳ـ مدار معادل یک مدار L-C موازی را در دو حالت زیر رسم کنید.

الف: $X_L > X_C$

ب: $X_C > X_L$

۱۴ـ دو عنصر $L = ۱۰ mH$ و $C = ۱۰۰ \mu F$ مفروض‌اند. مطلوب است رسم منحنی تابع تغییرات امپدانس و جریان این دو عنصر در محدوده‌ی فرکانس ۵۰Hz تا 5kHz در دو حالت سری و موازی.

فصل ششم

مدارهای R - L - C جریان متناوب

هدف‌های رفتاری: در پایان این فصل، از دانش‌آموز انتظار می‌رود:

۱ــ مدار R-L-C سری و موازی و دیاگرام برداری جریان و ولتاژ را رسم کند و زوایای اختلاف فاز را از روی دیاگرام نشان دهد.

۲ــ روابط مربوط به محاسبه‌ی مقاومت ظاهری و جریان ولتاژ، ضریب توان و توان‌ها را در مدارهای R-L-C سری و موازی بنویسد و با استفاده از فرمول‌های مذکور، مقادیر خواسته شده را محاسبه کند.

۳ــ تأثیر فرکانس را بر مقاومت ظاهری، جریان‌ها، توان‌ها و ضریب توان با نوشتن فرمول‌های مربوط در مدارهای سری و موازی بررسی کند.

۴ــ فرکانس رزنانس را برای مدارهای R-L-C سری و موازی محاسبه کرده و موارد کاربرد فرکانس رزنانس را ذکر کند.

۵ــ بهنای باند، ضریب کیفیت مدارهای R-L-C سری و موازی را به دست آورد.

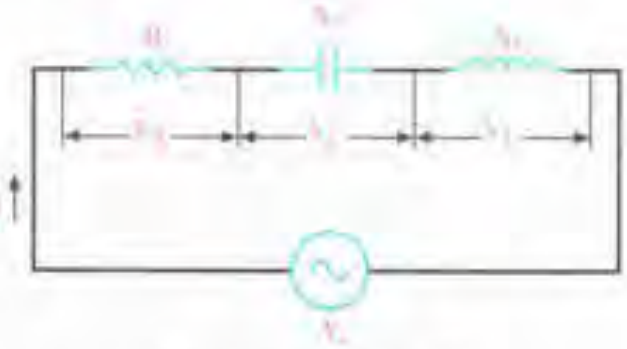
۱ــ۶ــ مقدمه

در یک شبکه‌ی الکتریکی، مصرف‌کننده‌های متنوعی تغذیه می‌شوند. این مصرف‌کننده‌ها با توجه به نوع کار در رده‌بندی مقاومت اهمی، سلفی و خازنی یا ترکیب سری یا موازی آن‌ها قرار می‌گیرند؛ مثلاً در یک واحد صنعتی الکتروموتورهای پر قدرت، انرژی مکانیکی واحد صنعتی را تأمین می‌کنند. می‌دانیم یک الکتروموتور شامل یک یا چند بوبین و سیم‌پیچ است و با یک مدار R-L، مدل می‌شود. در سیستم‌های مخابراتی از قبیل رادیو و تلویزیون، فرستنده‌های رادیویی و تلویزیونی مدارهای مکالمه‌ی تلفن و مدارهای مکالمه‌ی سیستم دربازکن، ترکیب‌های متنوعی از R-L-C در اتصال سری و موازی وجود دارد. در این فصل، ابتدا به بررسی اتصال سری و موازی

R-L-C می‌پردازیم. سپس ترکیب‌های مختلط این مدارها را بررسی خواهیم کرد.

۲ــ۶ــ مدارهای R-L-C سری

مدار الکتریکی R-L-C سری مطابق شکل ۱ــ۶ است. در این مدار سه عنصر R، L و C به‌طور متوالی اتصال دارند. اگر جریان سینوسی $i = I_m \sin(\omega t)$ این مدار سری را تغذیه کند، در دو سر مقاومت اهمی ولتاژی به معادله‌ی $v_R = I_m R \sin \omega t$ ایجاد می‌کند که این ولتاژ با جریان هم‌فاز است. در دو سر سلف، ولتاژی به معادله‌ی $v_L = X_L I_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$ و در دو سر خازن، ولتاژی به معادله‌ی $v_C = X_C I_m \sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$ پدید می‌آید. به طوری که در شکل ۱ــ۶ مشاهده می‌شود، این ولتاژها هم فاز نیستند و راستای بردار آن‌ها، بر روی هم منطبق نیست. به همین علت، ولتاژ کل مدار از جمع برداری رابطه‌ی ۱ــ۶ به‌دست می‌آید.

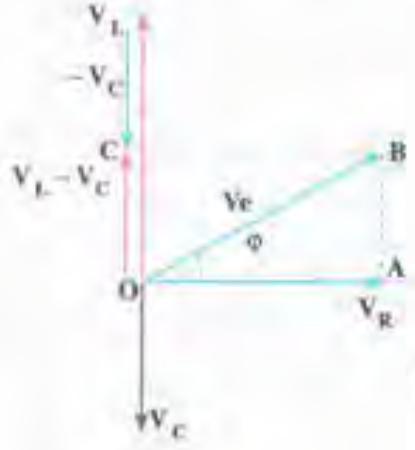


شکل ۱ــ۶ــ مدار R-L-C سری

$$\vec{V_e} = \vec{V_R} + \vec{V_C} + \vec{V_L} \qquad (۶ــ۱)$$

دیاگرام برداری ولتاژ و جریان، مطابق شکل ۲ــ۶ خواهد شد. از آن‌جا که جریان در عناصر R، L و C یکسان است، دیاگرام برداری R-L-C سری، بر مبنای جریان در شکل ۲ــ۶ رسم شده است. در رسم این دیاگرام $X_L > X_C$ فرض شده است و در مجموع مدار خاصیت R-L سری دارد. به طور کلی می‌توان نوشت:

۱ــ اگر $X_L > X_C$ باشد، مدار در مجموع دارای خاصیت اهمی و سلفی است و ولتاژ بر جریان، تقدم فاز دارد.



شکل ۲ــ۶ــ دیاگرام برداری مدار R-L-C سری

۲ـ اگر $X_L = X_C$ باشد، مدار کاملاً خاصیت اهمی دارد و ولتاژ و جریان هم‌فازند. (حالت تشدید)

۳ـ اگر $X_L < X_C$ باشد، مدار خاصیت اهمی خازنی خواهد داشت و ولتاژ از جریان عقب‌تر خواهد بود.

۴ـ با تغییر عناصر R، L و C می‌توان در مدار اختلاف فاز بین -۹۰° تا $+۹۰^\circ$ الکتریکی ایجاد کرد، یعنی $-۹۰ < \varphi < +۹۰$

۱ـ۲ـ۶ـ محاسبه‌ی امپدانس مدار R-L-C سری: در مثلث OAB دیاگرام برداری مدار R-L-C سری می‌توان نوشت:

$$\overline{OB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AB}^2$$

$$V_e^2 = V_R^2 + (V_L - V_C)^2 \qquad (۶ـ۲)$$

اگر در رابطه‌ی ۶ـ۲ مقادیر $V_e = I_e Z$ ، $V_R = I_e R$ ، $V_L = I_e X_L$ و $V_C = I_e X_C$ را جایگزین کنیم، خواهیم داشت:

$$I_e^2 Z^2 = I_e^2 R^2 + (I_e X_L - I_e X_C)^2$$

$$I_e^2 Z^2 = I_e^2 R^2 + I_e^2 (X_L - X_C)^2$$

$$Z^2 = R^2 + (X_L - X_C)^2$$

$$\boxed{Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} \qquad (۶ـ۳)$$

۲ـ۲ـ۶ـ محاسبه‌ی اختلاف فاز و ضرایب توان‌ها: در مثلث OAB شکل ۲ـ۶ می‌توان نوشت:

$$\tan\varphi = \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} = \frac{|V_L - V_C|}{V_R} = \frac{|X_L I - X_C I|}{RI} = \frac{|X_L - X_C|}{R}$$

بدین ترتیب، φ زاویه‌ی اختلاف فاز به شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$\tan\varphi = \frac{|X_L - X_C|}{R} \Rightarrow \varphi = \tan^{-1}\frac{|X_L - X_C|}{R} \qquad (۶ـ۴)$$

$$\cos\varphi = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{V_R}{V} = \frac{I \times R}{I \times Z}$$

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{R}{Z}} \qquad (۶ـ۵)$$

$$\sin\varphi = \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} = \frac{|V_L - V_C|}{V} = \frac{|I \times X_L - I \times X_C|}{I \times Z}$$

$$\boxed{\sin\varphi = \frac{|X_L - X_C|}{Z}} \qquad (۶\_۶)$$

۳ــ۲ــ۶ــ مثلث توان‌ها: توان مصرفی در مقاومت اهمی، توان اکتیو و در سلف و خازن از نوع راکتیو است.

$$P_e = I_e^2 R = V_e I_e \cos\varphi \ (W) \qquad (۶\_۷)$$

$$P_{d_1} = I_e^2 X_L \qquad (V.A.R) \text{ سلفی}$$

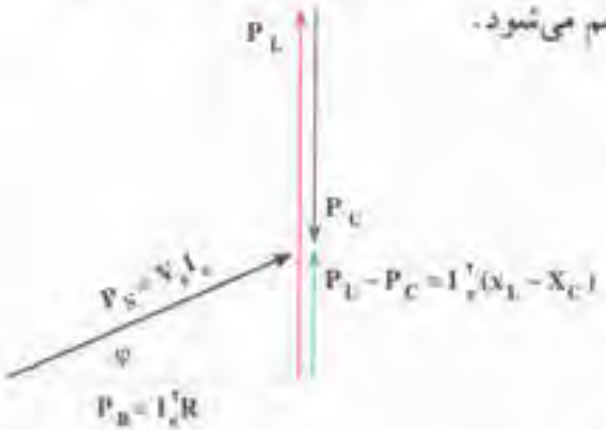
$$P_{d_2} = -I_e^2 X_C \qquad (V.A.R) \text{ خازنی}$$

توان راکتیو کل برابر است با :

$$P_d = P_{d_1} + P_{d_2} = I_e^2 X_L - I_e^2 X_C = I_e^2 (X_L - X_C)$$

$$\boxed{P_d = V_e I_e \sin\varphi = I_e^2 (X_L - X_C)} \qquad (V.A.R) \qquad (۶\_۸)$$

با توجه به توان مفید مقاومت و توان‌های راکتیو سلف و خازن مثلث توان‌ها، مطابق شکل ۳ــ۶ رسم می‌شود.



شکل ۳ــ۶ــ مثلث توان‌های مدار R-L-C سری

اگر جریان $i = I_m \sin\omega t$، یک مدار R-L-C سری را تغذیه کند، با توجه به روابط ولتاژهای دوسر مقاومت اهمی و سلفی و خازنی و رابطه‌ی زمانی توان‌ها می‌توان نوشت :

$$i = I_m \sin\omega t \qquad \text{معادله‌ی زمانی جریان مدار}$$

$$V_m = I_m \times Z$$

ولتاژ دو سر مقاومت اهمی را می‌توان به صورت زیر نوشت :

$$v_R = I_m R \sin\omega t = \frac{V_m}{Z} R \sin\omega t$$

ولتاژ دو سر سلف برابر است با :

$$v_L = I_m X_L \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

ولتاژ دو سر خازن برابر است با :

$$v_C = I_m X_C \sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

بدین ترتیب، ولتاژ کل مدار محاسبه می‌شود :

$$v = I_m Z \sin(\omega t + \varphi)$$

معادله‌ی توان مصرفی در مقاومت اهمی از حاصل‌ضرب ولتاژ و جریان آن به‌دست می‌آید :

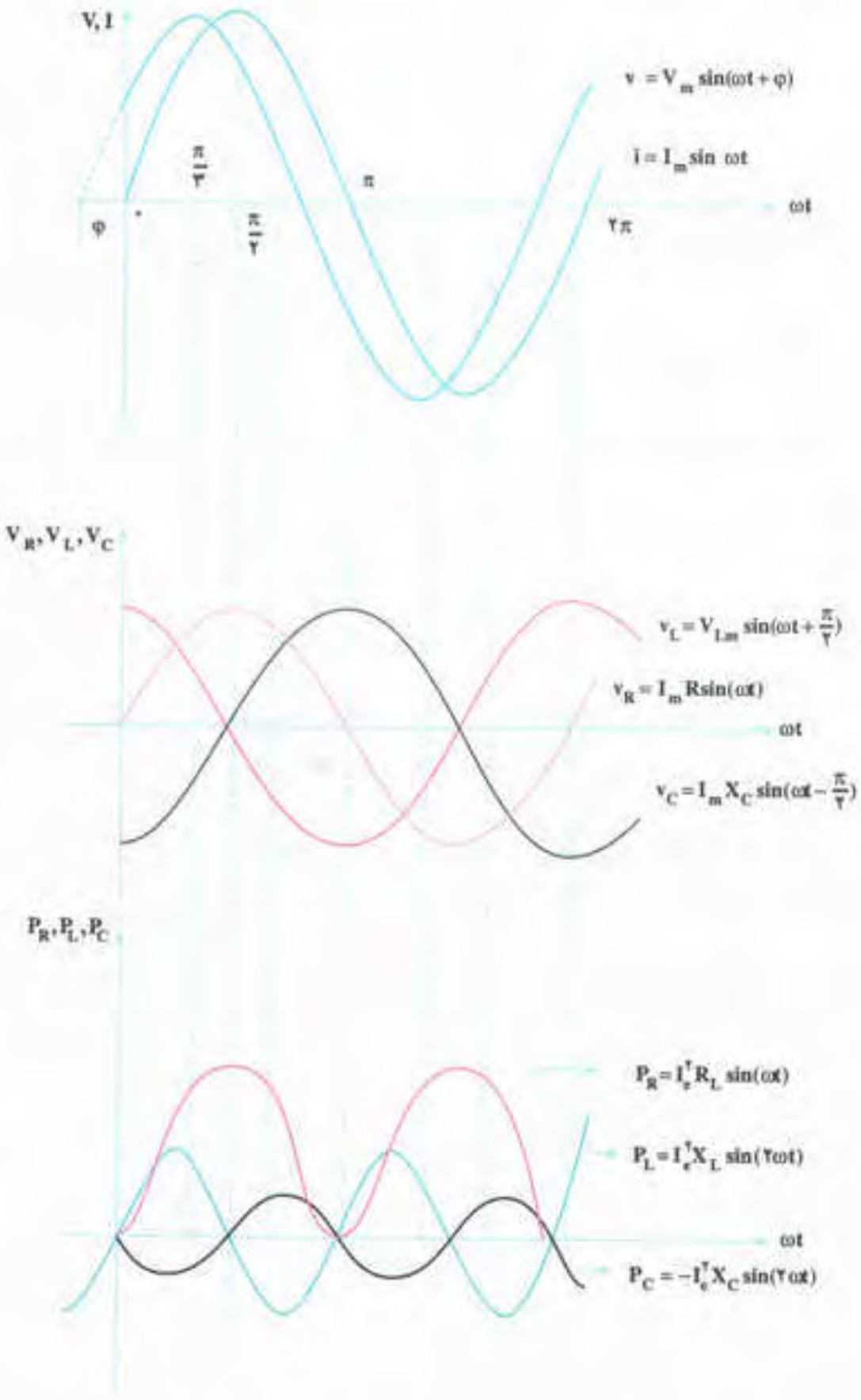
$$P_R = I_m^2 R \sin^2 \omega t$$

با توجه به این‌که $\sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) = \cos \omega t$ ، $\sin(\omega t - \frac{\pi}{2}) = -\cos \omega t$ ، $I_m = \sqrt{2} I_e$ و $\sin 2\omega t = 2 \sin \omega t + \cos \omega t$ توان مقاومت‌های سلفی و خازنی را می‌توان به‌قرار زیر محاسبه کرد :

$$P_L = I_m^2 X_L \sin(\omega t) \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) = I_e^2 X_L \sin 2\omega t$$

$$P_C = I_m^2 X_C \sin(\omega t) \sin(\omega t - \frac{\pi}{2}) = -I_e^2 X_C \sin 2\omega t$$

منحنی تغییرات توابع بالا در شکل ۴ـ۶ مشاهده می‌شود.



شکل ۴ــ۶ــ منحنی تغییرات توابع زمانی جریان کل، ولتاژ کل
ولتاژ دو سر مقاومت اهمی، سلفی، خازنی، توان‌های اهمی، سلفی و خازنی مدار R-L-C سری

مثال ۱ــ۶: در مدار شکل مقابل

مطلوب است :

الف ــ امپدانس مدار،

$$Z=\sqrt{R^2+(X_L-X_C)^2}=\sqrt{(\sqrt{300})^2+(20-10)^2}=20\Omega$$

ب ــ جریان منبع ولتاژ و معادله‌ی زمانی آن،

$$\cos\varphi=\frac{R}{Z}=\frac{\sqrt{300}}{20}=\frac{10\sqrt{3}}{20}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\varphi=\cos^{-1}\left(\frac{R}{Z}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=30^\circ$$

$$I_m=\frac{V_m}{Z}=\frac{100}{20}=5A\ ,\ I_e=\frac{I_m}{\sqrt{2}}=\frac{5}{\sqrt{2}}=2/5\sqrt{2}=3/53A$$

$X_L > X_C$ می‌باشد ؛ بنابراین، جریان پس فاز است. $i=5\sin(500t-30^\circ)$

ب ــ ولتاژ دوسر R، L و C و معادلات زمانی آن‌ها.

$$V_{R_m}=RI_m=\sqrt{300}\times5=5\sqrt{300}=50\sqrt{3}V$$

هم‌فاز جریان $v_R=50\sqrt{3}\sin(500t-30)$

$$V_{L_m}=X_L.I_m=20\times5=100V$$

۹۰ درجه جلوتر از جریان $v_L=100\sin(500t+60)$

$$V_{C_m}=X_C.I_m=10\times5=50V$$

۶۰ درجه عقب‌تر از جریان $v_C=50\sin(500t-120^\circ)$

ت ــ رسم دیاگرام‌برداری ولتاژها و جریان.

شکل ۵ــ۶ــدیاگرام برداری ولتاژها

ت ـ توان مصرفی و مثلث توان.

$$P_e = V_e I_e . \cos\varphi = \frac{۱۰۰}{\sqrt{۲}} \times \frac{۵}{\sqrt{۲}} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۱۲۵\sqrt{۳}$$

اگر $X_L > X_C$ و زاویه φ مثبت بود، P_d نیز مثبت است.

$$P_d = V_e I_e \sin\varphi = \frac{۱۰۰}{\sqrt{۲}} \times \frac{۵}{\sqrt{۲}} \times \frac{۱}{۲} = +۱۲۵ \quad V.A.R$$

$$P_s = V_e I_e = \frac{۱۰۰}{\sqrt{۲}} \times \frac{۵}{\sqrt{۲}} = ۲۵۰ \quad V.A$$

توان‌ها را به‌روش زیر نیز می‌توان محاسبه کرد. بدیهی است در هر دو حالت جواب‌ها یکی است.

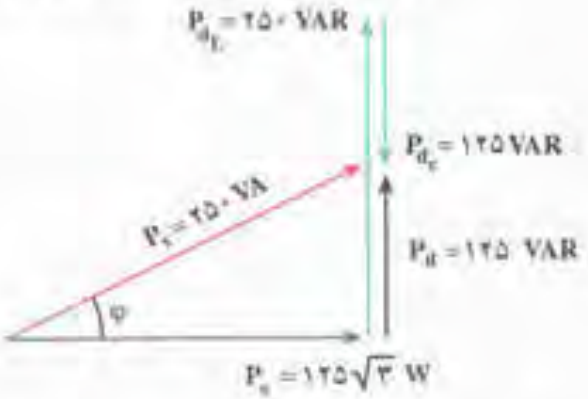
$$P_e = R.I_e^۲ = \sqrt{۳۰۰} \times (\frac{۵}{\sqrt{۲}})^۲ = ۱۰\sqrt{۳} \times \frac{۲۵}{۲} = ۱۲۵\sqrt{۳} \quad W$$

$$P_{d_L} = X_L.I_e^۲ = ۲۰(\frac{۵}{\sqrt{۲}})^۲ = +۲۵۰ \quad V.A.R$$

$$P_{d_C} = X_C.I_e^۲ = ۱۰(\frac{۵}{\sqrt{۲}})^۲ = -۱۲۵ \quad V.A.R$$

$$P_d = P_{d_L} + P_{d_C} = ۲۵۰ - ۱۲۵ = +۱۲۵ \quad V.A.R$$

$$P_s = \sqrt{P_e^۲ + P_d^۲} = \sqrt{(۱۲۵\sqrt{۳})^۲ + (۱۲۵)^۲} = ۲۵۰ \quad V.A$$



شکل ۶ـ۶

۳ـ۶ـ مدارهای R - L - C موازی

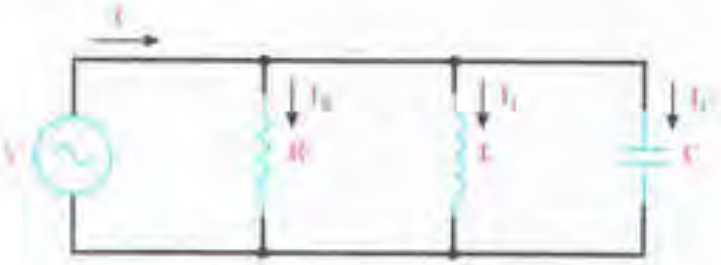
در مدارهای R-L-C موازی، ولتاژ عناصر با هم برابرند. برای جریان در هر عنصر، یک مسیر مستقل وجود دارد. مدار الکتریکی و مسیرهای مستقل جریان R-L-C موازی در شکل ۷ـ۶ نشان داده شده است. اگر یک ولتاژ سینوسی $v = V_m \sin\omega t$ مدار R-L-C موازی را تغذیه کند، جریان i_R با ولتاژ هم‌فاز جریان i_C از ولتاژ ۹۰° جلوتر و جریان i_L از ولتاژ عقب‌تر است، به ترتیب معادله‌ی

زمانی $i_R = \frac{V_m}{R}\sin\omega t$ ، $i_C = \frac{V_m}{X_C}\sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$ و $i_L = \frac{V_m}{X_L}\sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$ را خواهند دانست.

جریان کل مدار از ترکیب برداری جریان‌های $\vec{I}_R$ و $\vec{I}_C$ و $\vec{I}_L$ به دست می‌آید.

$$\vec{I} = \vec{I}_R + \vec{I}_L + \vec{I}_C \qquad (۶\_۹)$$

با توجه به مقادیر مؤثر جریان‌های مقاومت اهمی، سلف، خازن از طریق رسم دیاگرام برداری مطابق شکل ۸ــ۶، جریان کل مدار تعیین می‌شود. در رسم دیاگرام $X_C < X_L$ فرض شده است.



شکل ۷ــ۶ــ مدار R-L-C موازی

شکل ۸ــ۶ــ دیاگرام برداری مدار R-L-C موازی

۱ــ۳ــ۶ــ محاسبه‌ی امپدانس مدار R-L-C موازی: از شکل ۸ــ۶، دیاگرام برداری مدار R-L-C در مثلث قائم الزاویه‌ی OBA می‌توان نوشت :

$$\overline{OB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AB}^2 \qquad (۶\_۱۰)$$

$$\overline{OB} = I \text{ و } \overline{OA} = I_R \text{ و } \overline{AB} = I_C - I_L \qquad (۶\_۱۱)$$

با جایگزینی روابط ۱۱ــ۶ در رابطه‌ی ۱۰ــ۶ این رابطه به‌دست می‌آید :

$$I^2 = I_R^2 + (I_C - I_L)^2 \qquad (۶\_۱۲)$$

$$I = \frac{V}{Z} \quad و \quad I_R = \frac{V}{R} \quad و \quad I_C = \frac{V}{X_C} \quad و \quad I_L = \frac{V}{X_L}$$

با جایگزینی این مقادیر در رابطه‌ی ۱۲ـ۶ خواهیم داشت :

$$\frac{V^2}{Z^2}=\frac{V^2}{R^2}+\left(\frac{V}{X_C}-\frac{V}{X_L}\right)^2$$

$$\boxed{\frac{1}{Z^2}=\frac{1}{R^2}+\left(\frac{1}{X_C}-\frac{1}{X_L}\right)^2} \qquad (۶\_۱۳)$$

۲ـ۳ـ۶ـ محاسبه‌ی اختلاف فاز، ضریب توان‌ها و توان‌های مدار R-L-C موازی:

از دیاگرام برداری شکل ۸ـ۶ می‌توان نوشت :

$$\tan\varphi=\frac{\overline{AB}}{\overline{OA}}=\frac{|I_C-I_L|}{I_R} \qquad (۶\_۱۴)$$

$$\tan\varphi=\frac{\frac{V}{X_C}-\frac{V}{X_L}}{\frac{V}{R}}=\frac{\frac{1}{X_C}-\frac{1}{X_L}}{\frac{1}{R}}=\boxed{\tan\varphi=R\left(\frac{1}{X_C}-\frac{1}{X_L}\right)} \qquad (۶\_۱۵)$$

بنابراین، اختلاف فاز برابر است با :

$$\boxed{\varphi=\tan^{-1}R\left(\frac{1}{X_C}-\frac{1}{X_L}\right)} \qquad (۶\_۱۶)$$

برای ضریب توان می‌توان نوشت :

$$\cos\varphi=\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}=\frac{I_R}{I}=\frac{\frac{V}{R}}{\frac{V}{Z}}$$

$$\boxed{\cos\varphi=\frac{Z}{R}} \qquad (۶\_۱۷)$$

برای تعیین $\sin\varphi$ می‌توان نوشت :

$$\sin\varphi=\frac{\overline{AB}}{\overline{OB}}=\frac{I_C-I_L}{I} \qquad (۶\_۱۸)$$

$$\sin\varphi=\frac{\frac{V}{X_C}-\frac{V}{X_L}}{\frac{V}{Z}}$$

$$\boxed{\sin\varphi = Z\left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right)} \qquad (۶\_۱۹)$$

توان مؤثر را می‌توان به وسیله‌ی روابط زیر محاسبه کرد :

$$P_e = I_R^2 R = \left(\frac{V}{R}\right)^2 \times R = \frac{V^2}{R} \qquad (۶\_۲۰)$$

اگر از رابطه‌ی ۱۷ـ۶، $I_e = \frac{V}{Z}$ را جایگزین کنیم، خواهیم داشت :

$$P_e = \frac{V^2}{R} = \frac{I_e^2 \times Z^2}{R} = \underbrace{I_e \times Z}_{V_e} \times I_e \times \frac{Z}{R}$$

بنابراین، توان مؤثر را در شکل عام رابطه‌ی ۲۱ـ۶ خواهیم داشت :

$$\boxed{P_e = V_e I_e \cos\varphi} \qquad (۶\_۲۱)$$

برای محاسبه‌ی توان راکتیو، ابتدا توان‌های سلف و خازن را حساب می‌کنیم و توان راکتیو را از آن‌ها نتیجه می‌گیریم :

$$P_L = I_L^2 X_L = \frac{V_e^2}{X_L^2} \times X_L = \frac{V_e^2}{X_L}$$

$$P_C = -I_C^2 X_C = -\frac{V_e^2}{X_C^2} \times X_C = -\frac{V_e^2}{X_C}$$

توان راکتیو از جمع جبری توان‌های P_L و P_C به‌دست می‌آید.

$$\boxed{P_d = P_L + P_C}$$

$$P_d = \frac{V_e^2}{X_L} - \frac{V_e^2}{X_C} = V_e^2\left(\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C}\right) = V_e . V_e\left(\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C}\right)$$

به جای یکی از V_e ها مقدار $I_e Z = V_e$ را منظور می‌کنیم.

$$P_d = I_e Z \times V_e\left(\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C}\right)$$

با توجه به رابطه‌ی ۱۹ـ۶ می‌توان نوشت :

$$\boxed{P_d = I_e V_e \sin\varphi} \qquad (۶\_۲۲)$$

توان ظاهری از توان اکتیو و راکتیو به قرار رابطه‌ی ۲۳ـ۶محاسبه می‌شود.

$$P_s = \sqrt{P_e^2 + P_d^2} = V_e I_e \qquad (۶\_۲۳)$$

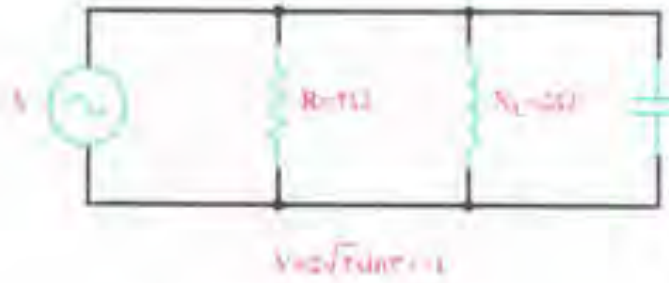
مثال ۲ـ۶: در شکل ۹ـ۶ مطلوب است:

الف ـ جریان هر شاخه.

ب ـ جریان کل و معادله‌ی زمانی آن.

پ ـ توان مصرفی.

ت ـ مثلث توان‌ها.



شکل ۹ـ۶

راه‌حل:

الف ـ

$$V_e = \frac{V_m}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 5V$$

هم‌فاز با ولتاژ V

$$I_R = \frac{V_e}{R} = \frac{5}{2} = 2/5A$$

نسبت به ولتاژ ۹۰° پیش‌فاز

$$I_C = \frac{V_e}{X_C} = \frac{5}{10} = 0/5A$$

نسبت به ولتاژ ۹۰° پس‌فاز

$$I_L = \frac{V_e}{X_L} = \frac{5}{5} = 1A$$

ب ـ برای محاسبه‌ی جریان کل و معادله‌ی زمانی آن از دیاگرام برداری جریان‌ها در مبنای ولتاژ استفاده می‌کنیم. بدین منظور، دیاگرام برداری را مطابق شکل ۱۰ـ۶ رسم می‌کنیم.

شکل ۱۰ـ۶

براساس دیاگرام برداری شکل ۱۰ـ۶، می‌توان محاسبه‌های زیر را انجام داد:

$$I^2 = I_R^2 + (I_L - I_C)^2$$

$$I^2 = 2/5^2 + (1 - 0/5)^2$$

$$I^2 = 6/5 \Rightarrow I = 2/55 \ A$$

$$\varphi = -\tan^{-1}\left(\frac{I_L - I_C}{I_R}\right) = -\tan^{-1}\left(\frac{۰/۵}{۲/۵}\right) = -۱۱/۳$$

$$I_m = I_e\sqrt{۲} = ۲/۵۵ \times \sqrt{۲} = ۳/۶ \ A$$

$$i = I_m \sin(\omega t + \varphi)$$

$$i = ۳/۶\sin(۳۰۰t - ۱۱/۳^\circ)$$

ب ـ $$P_e = V_e I_e \cos\varphi = ۵ \times ۲/۵۵\cos(-۱۱/۳^\circ)$$

$$P_e = ۱۲/۵ \ W$$

ت ـ برای رسم مثلث توان‌ها، ابتدا توان تک‌تک عناصر را محاسبه می‌کنیم.

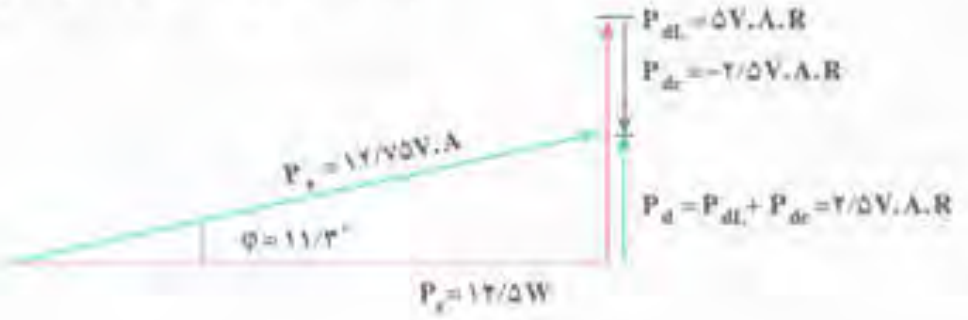
$$P_e = I_R^۲ \times R = (۲/۵)^۲ \times ۲ = ۱۲/۵ \quad W$$

$$P_{dL} = I_L^۲ \times X_L = ۱^۲ \times ۵ = ۵ \quad V.A.R$$

$$P_{dC} = -I_C^۲ \times X_L = -۰/۵^۲ \times ۱۰ = -۲/۵ \quad V.A.R$$

$$P_d = P_{dL} + P_{dC} = ۵ - ۲/۵ = ۲/۵ \quad V.A.R$$

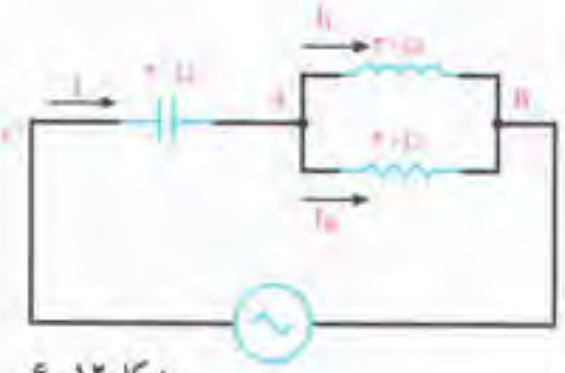
$$P_S = \sqrt{۱۲/۵^۲ + ۲/۵^۲} = ۱۲/۷۵ \quad V.A$$



شکل ۱۱ـ۶

۴ـ۶ـ مدارهای R-L-C مختلط (سری، موازی)

مدارهای R-L-C مختلط از چند مدار ساده‌ی R، R-L، R-C یا R-L-C در شاخه‌های موازی یا سری تشکیل می‌شوند. این مدارها پس از ساده کردن شبکه در نهایت به یک مدار R-L یا R-C ساده تبدیل می‌شود. از آن‌جا که خواص این مدارها را قبلاً مطالعه کرده‌ایم، مدارهای R-L-C مختلط را با چند مثال دنبال می‌کنیم. در تحلیل مدارهای R-L-C مختلط، برای سهولت تحلیل، ولتاژ شاخه‌ی موازی را به عنوان ولتاژ مرجع (مبنا) در نظر می‌گیرند و سایر کمیّت‌های الکتریکی مدار را بر اساس ولتاژ مبنای شاخه‌ی موازی محاسبه می‌کنند.



شکل ۱۲ـ۶

مثال ۳ـ۶: در مدار الکتریکی شکل ۱۲ـ۶ $V_{AB}=۱۲۰$ ولت است.

مطلوب است :

الف ـ جریان هر شاخه و جریان کل.

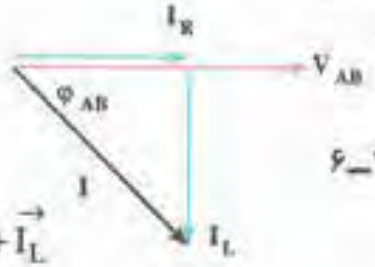
راه‌حل: با فرض اینکه $V_{AB}=۱۲۰$ مبناست محاسبات را دنبال می‌کنیم.

$$I_R=\frac{V_{AB}}{R}=\frac{۱۲۰}{۴۰}=۳[A]$$

$$I_L=\frac{V_{AB}}{X_L}=\frac{۱۲۰}{۳۰}=۴[A]$$

برای محاسبه‌ی جریان کل، دیاگرام برداری جریان‌ها را در مبنای V_{AB} رسم می‌کنیم و I_R هم‌فاز V_{AB} می‌باشد و I_L به اندازه‌ی ۹۰ درجه از V_{AB} عقب‌تر است.

از شکل ۱۳ـ۶ می‌توان نوشت :



شکل ۱۳ـ۶

$$\vec{I}=\vec{I_R}+\vec{I_L}$$

این رابطه، همان رابطه‌ی ۲۷ـ۳ است.

$$I^۲=I_R^۲+I_L^۲$$

$$I=\sqrt{I_R^۲+I_L^۲}=\sqrt{۳^۲+۴^۲}=۵[A]$$

$$\varphi_{AB}=\tan^{-۱}\left(\frac{I_L}{I_R}\right)=\tan^{-۱}\left(\frac{۴}{۳}\right)=۵۳^\circ$$

ب ـ ولتاژ منبع.

V_{AC} ولتاژ دو سر خازن است که محاسبه می‌شود.

$$V_{AC}=X_C.I=۲۰\times۵=۱۰۰[V]$$

برای محاسبه‌ی ولتاژ منبع باید جمع برداری زیر را انجام داد.

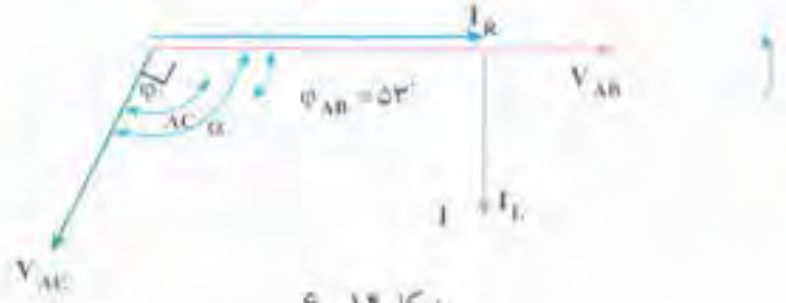
$$\vec{V}=\vec{V}_{AB}+\vec{V}_{AC}$$

با استفاده از رابطه‌ی ۵ـ۲ محاسبه می‌شود.

$$\vec{V}=\vec{V}_{AB}+\vec{V}_{AC}=\sqrt{(V_{AB})^۲+(V_{AC})^۲+۲(V_{AB})(V_{AC})\cos\alpha}$$

که α زاویه‌ی بین V_{AC} با V_{AB} است و برای محاسبه‌ی آن باید V_{AC} را در شکل ۱۳ـ۶ رسم کرد.

V_{AC} ولتاژ دو سر خازن خالص می‌باشد که از جریان I به اندازه‌ی ۹۰ درجه عقب‌تر است و با رسم آن در شکل ۱۳ـ۶ و شکل ۱۴ـ۶ به‌دست می‌آید.



شکل ۱۴ـ۶

با توجه به شکل ۱۴ـ۶ داریم :

$$\alpha = \varphi_{AB} + \varphi_{AC}$$

$$\alpha = 53^\circ + 90^\circ = 143^\circ$$

با جاگذاری مقادیر در رابطه‌ی زیر V محاسبه می‌شود.

$$V = \vec{V}_{AB} + \vec{V}_{AC} = \sqrt{V_{AB}^2 + V_{AC}^2 + 2V_{AB}.V_{AC}\cos\alpha}$$

محاسبه‌ی کسینوس 143° از رابطه‌ی زیر امکان‌پذیر است.

$$\cos\alpha = -\cos(\pi - \alpha)$$

$$\cos 143^\circ = -\cos(180^\circ - 143^\circ) = -\cos 37^\circ = -0/8$$

$$\vec{V} = \vec{V}_{AB} + \vec{V}_{AC} = \sqrt{120^2 + 100^2 + 2(120)(100)(-0/8)} = 72/1\,[V]$$

ب ـ امپدانس کل مدار.

ساده‌ترین راه برای محاسبه‌ی امپدانس کل مدار، رابطه‌ی $Z = \frac{V}{I} = \frac{72/1}{5} = 14/4\Omega$ است.

ت ـ مثلث توان‌ها.

$$P_a = R.I_R^2 = 40(3)^2 = 360\,[W]$$

$$P_{d_L} = X_L.I_L^2 = 30(4)^2 = +480\,[V.A.R]$$

$$P_{d_C} = X_C.I_C^2 = X_C.I^2 = 20(5)^2 = -500\,[V.A.R]$$

شکل ۱۵ـ۶

با توجه به شکل ۱۵ـ۶ می‌توان نوشت :

$$P_S = \sqrt{P_c^2 + (P_{d_L} - P_{d_C})^2} = \sqrt{۳۶۰^2 + (۳۶۰ - ۴۸۰)^2} = ۳۷۹/۴ V.A$$

شکل ۱۶ـ۶

مثال ۴ـ۶: در مدار الکتریکی شکل ۱۶ـ۶ اگر مقدار قرائت شده از ولت‌متر در دو سر مقاومت ۳ اهمی ۶۰ ولت باشد، مطلوب است :

الف ـ جریان دو شاخه.

$$I_۲ = \frac{V_R}{R} = \frac{۶۰}{۳۰} = ۲A$$

$$Z_۲ = \sqrt{R_۲^2 + X_{C_۲}^2} = \sqrt{۳۰^2 + ۴۰^2} = ۵۰\Omega$$

$$V = Z_۲ . I_۲ = ۵۰ \times ۲ = ۱۰۰V$$

$$Z_۱ = \sqrt{R_۱^2 + X_{L_۱}^2} = \sqrt{۱۶^2 + ۱۲^2} = ۲۰\Omega$$

$$I_۱ = \frac{V}{Z_۱} = \frac{۱۰۰}{۲۰} = ۵A$$

ب ـ رسم دیاگرام برداری $I_۱$ و $I_۲$.

ابتدا V را به‌عنوان مبنا اختیار می‌کنیم و با محاسبه‌ی اختلاف فاز $I_۱$ و $I_۲$ نسبت به V آن دو را رسم می‌کنیم (شکل ۱۷ـ۶).

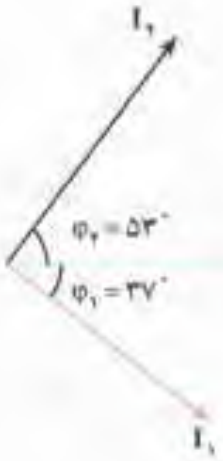
شاخه‌ی ۱ یک مدار R-L سری است و داریم : $\cos\varphi_۱ = \frac{R_۱}{Z_۱} = \frac{۱۶}{۲۰} = ۰/۸$

«پس‌فاز» $\varphi_۱ = \cos^{-1}(۰/۸) = ۳۷^\circ$

شاخه‌ی ۲ یک مدار R-C سری است و داریم : $\cos\varphi_۲ = \frac{R_۲}{Z_۲} = \frac{۳۰}{۵۰} = ۰/۶$

«پیش‌فاز» $\varphi_۲ = \cos^{-1}(۰/۶) = ۵۳^\circ$

$I_۱$ به اندازه‌ی $\varphi_۱ = ۳۷^\circ$ از V عقب‌تر و $I_۲$ به اندازه‌ی $\varphi_۲ = ۵۳^\circ$ از V جلوتر است.



شکل ۱۷ـ۶

پ ـ جریان کل I .

$$\vec{I} = \vec{I_1} + \vec{I_2}$$

با توجه به شکل ۱۶ـ۶ داریم :

$$\alpha = \varphi_1 + \varphi_2 = 37^\circ + 53^\circ = 90^\circ$$

α زاویه‌ی بین I_1 و I_2 است.

و با توجه به رابطه‌ی ۵ـ۲ مقدار I محاسبه می‌شود.

$$I = \sqrt{I_1^2 + I_2^2 + 2I_1 I_2 \cos\alpha} = \sqrt{5^2 + 2^2 + 2(5)(2)\cos 90^\circ} = 5/38A$$

ت ـ امپدانس مدار.

$$Z = \frac{V}{I} = \frac{100}{5/38} = 18/5\Omega$$

ث ـ توان‌های مصرفی و مثلث توان.

توان‌های اکتیو و راکتیو را برای هر شاخه محاسبه می‌کنیم.

$$P_{c_1} = V.I_1 \cos\varphi_1 = 100 \times 5 \times 0/8 = 400[W]$$

P_{d_1} مثبت است ؛ زیرا این شاخه پس‌فاز است.

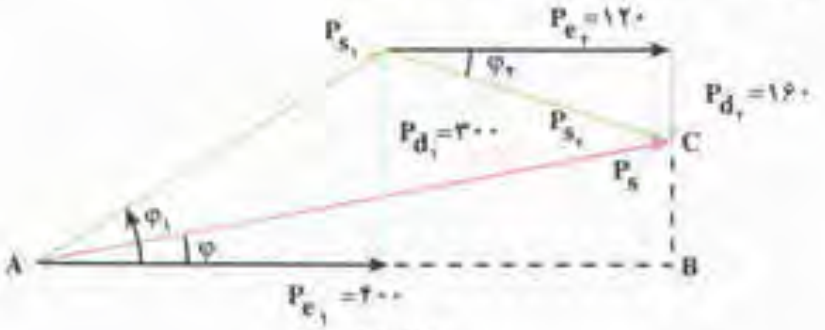
$$P_{d_1} = V.I_1 \sin\varphi_1 = 100 \times 5 \times 0/6 = +300[V.A.R]$$

$$P_{c_2} = VI_2 \cos\varphi_2 = 100 \times 2 \times 0/6 = 120[W]$$

P_{d_2} منفی است ؛ زیرا این شاخه پیش‌فاز است.

$$P_{d_2} = V.I_2 \sin\varphi_2 = 100 \times 5 \times 0/6 = +300[V.A.R]$$

مثلث توان‌ها مطابق شکل ۱۸ـ۶ رسم می‌شود.



شکل ۱۸ـ۶

توان ظاهری هر شاخه با توجه به مثلث توان هر شاخه در شکل ۱۸ـ۶ محاسبه می‌شود.

$$P_{S_1} = \sqrt{P_{c_1}^2 + P_{d_1}^2} = \sqrt{۴۰۰^2 + ۳۰۰^2} = ۵۰۰ [V.A]$$

$$P_{S_2} = \sqrt{P_{c_2}^2 + P_{d_2}^2} = \sqrt{۱۲۰^2 + ۱۶۰^2} = ۲۰۰ V.A$$

برای محاسبه‌ی توان ظاهری کل باید به مثلث ABC توجه کرد و نوشت:

$$AC = P_S$$

$$AB = P_c = P_{c_1} + P_{c_2} = ۴۰۰ + ۱۲۰ = ۵۲۰ [W]$$

$$BC = P_d = P_{d_1} - P_{d_2} = ۳۰۰ - ۱۶۰ = ۱۴۰ [V.A.R]$$

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$P_1^2 = P_c^2 + P_d^2$$

$$P_S = \sqrt{P_c^2 + P_d^2} = \sqrt{۵۲۰^2 + ۱۴۰^2} = ۵۳۸/۵ [V.A]$$

ج ـ ضریب قدرت کل شبکه‌ی $\cos\varphi$ با توجه به مثلث ABC.

$$\cos\varphi = \frac{AB}{AC} = \frac{P_c}{P_S} = \frac{۵۲۰}{۵۳۸/۵} = ۰/۹۶$$

۵ـ۶ـ رزنانس در مدارهای R-L-C سری

شکل ۱ـ۶ را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم مقادیر R، C و L در طول تغییرات فرکانس همواره ثابت بمانند. در فرکانس‌های کم، $X_C = \frac{۱}{۲\pi fC}$، راکتانس خیلی زیاد از خود نشان می‌دهد. به‌طوری که در جریان d_C که $I = ۰$ است، در حالت پایدار امپدانس مدار را آن‌قدر زیاد می‌کند که جریان مدار عملاً به صفر می‌رسد. زمانی که فرکانس منبع تغذیه افزایش می‌یابد، راکتانس خازنی کاهش می‌یابد. در مقابل، راکتانس سلفی با توجه به $X_L = ۲\pi Lf$ افزایش می‌یابد. با توجه به رابطه‌ی ۳ـ۶، خازن و سلف در امپدانس مدار R-L-C سری رفتار متقابل دارند. در روند افزایش فرکانس از صفر به مقدار ∞، زمانی فرا می‌رسد که راکتانس خازنی و سلفی یک‌دیگر را خنثا می‌کنند. به عبارت دیگر، عبارت $X_L - X_C$ در رابطه‌ی ۳ـ۶ برابر صفر و ضریب توان مدار برابر یک است؛ چون $Z=R$ می‌شود. در این حالت، در مدار R-L-C هیچ‌گونه توان راکتیو مصرف نمی‌شود. این حالت از مدار R-L-C را حالت تشدید یا رزنانس گویند. فرکانس رزنانس با توجه به مطالب گفته شده به قرار

زیر محاسبه می‌شود:

$$X_L - X_C = 0 \qquad (۶\_۲۴)$$

$$L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0$$

$$L\omega = \frac{1}{C\omega} \Rightarrow L\omega^2 C = 1 \qquad (۶\_۲۵)$$

$$\omega = 2\pi f_r$$

$$L(2\pi f_r)^2 C = 1$$

$$\boxed{f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}} \qquad (۶\_۲۶)$$

رابطه فرکانس رزنانس نظیر مقدار محاسبه شده در مدارهای L-C است.

۱ــ۵ــ۶ــ رسم تابع تغییرات امپدانس و جریان مدار R-L-C سری: در فرکانس تشدید با توجه به رابطه‌ی $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$، امپدانس Z با مقاومت اهمی مدار مساوی می‌شود؛ زیرا $X_L = X_C$ شده و امپدانس به حداقل مقدار، یعنی R تنزل می‌کند. چون $I = \frac{V}{Z}$ است، در حالت تشدید، Z حداقل است. جریان I، حداکثر مقدار را خواهد داشت و اندازه‌ی جریان $I = \frac{V}{R}$ است. با افزایش فرکانس از موقعیت تشدید، امپدانس مدار R-L-C به علت رشد $X_L = 2\pi fL$ مجدداً افزایش می‌یابد و جریان رو به کاهش می‌گذارد. زمانی که $f \to \infty$ (فرکانس به بی‌نهایت میل می‌کند) امپدانس خیلی زیاد می‌شود؛ مجدداً جریان به صفر می‌رسد و مدار R-L-C باز می‌شود.

یادآوری می‌کنیم که در فرکانس‌های خیلی زیاد، راکتانس خازنی نیز صفر می‌شود. از طرف دیگر، راکتانس سلفی یک محدوده‌ی فرکانسی دارد و در آن محدوده‌ی اثرات سلف ظاهر می‌شود. در فرکانس‌های بسیار زیاد، سلف خاصیت خود را از دست می‌دهد و کمیت‌های مدار با روابطی که تا به حال مطالعه کردیم، قابل محاسبه نخواهند بود. این خاصیت سلف در طراحی مدارهای الکترونیکی و مخابراتی محدودیت‌هایی ایجاد می‌کند و به‌همین دلیل، برای هر فرکانس دلخواه نمی‌توان مداری طراحی کرد.

در محدوده‌ی فرکانسی صفر تا حالت تشدید (f_r)، مدار R-L-C، خاصیت خازنی از خود نشان می‌دهد. این خاصیت در محدوده‌ی فرکانسی تشدید به بالا، به خاصیت سلفی تبدیل می‌شود. با توجه به‌مطالب گفته شده تابع تغییرات Z=F(f) و I=F(f) مطابق شکل‌های ۱۹ــ۶ رسم می‌شوند.

f	Z	I
۰	∞	۰
f_r	R	$\frac{V}{R}$
∞	∞	۰

شکل ۱۹ــ ۶

۲ــ۵ــ۶ــ ضریب کیفیت مدار R-L-C سری:

$$Q=\frac{۲\pi \text{ (ماکزیمم انرژی ذخیره شده)}}{\text{انرژی مصرفی در یک سیکل}}$$

$$Q=\frac{۲\pi(W_{(L)}+W_{(C)})_{max.}}{I_e^۲.R.T}=\frac{۲\pi\left(\frac{۱}{۲}I_L^۲L+\frac{۱}{۲}CV_C^۲\right)_{max}}{I_e^۲.R.T} \qquad (۶\_۲۷)$$

با توجه به شکل ۴ــ۶ وقتی جریان ماکزیمم می‌شود، V_C صفر می‌شود. هم‌چنین وقتی V_C ماکزیمم می‌شود، جریان مدار یعنی I_{Lm} نیز صفر خواهد شد. بنابراین، در رابطه‌ی ۲۷ــ۶ یکی از ترم‌های $\frac{۱}{۲}I_{Lm}^۲L$. و $\frac{۱}{۲}CV_{Cm}^۲$ در حالت ماکزیمم وجود دارد.

$$Q_C=\frac{۲\pi\left(\frac{۱}{۲}I_{Lm}^۲L\right)}{I_e^۲.R.T}=\frac{۲\pi\left(\frac{۱}{۲}CV_{Cm}^۲\right)}{I_e^۲.R.T}$$

$$Q_C=\frac{۲\pi\left(\frac{۱}{۲}\times ۲I_e^۲L\right)}{I_e^۲\times R\times\frac{۲\pi}{\omega}}=\frac{L\omega}{R} \qquad (۶\_۲۸)$$

$$Q=\frac{۲\pi\left(\frac{۱}{۲}\times CV_{cm}^۲\right)}{I_e^۲\times R.T}=\frac{۲\pi\times\frac{۱}{۲}C\times\frac{I_m^۲}{C^۲\omega^۲}}{I_e^۲\times R\times\frac{۲\pi}{\omega}}=\frac{۱}{RC\omega}=\frac{X_C}{R} \qquad (۶\_۲۹)$$

اگر ω را برای فرکانس تشدید به ω_0 نشان دهیم، ضریب کیفیت مدار در فرکانس تشدید از رابطه‌ی ۶ـ۳۰ محاسبه می‌شود.

$$Q_0 = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{C\omega_0 R} \qquad (۶\_۳۰)$$

۶ـ۵ـ۳ـ پهنای باند (Band Width): پهنای باند به محدوده‌ای از فرکانس مدارهای R-L-C گفته می‌شود که در آن، اندازه‌ی جریان از $\frac{1}{\sqrt{2}}$ برابر مقدار ماکزیمم بیش‌تر باشد.

برای تعیین پهنای باند، منحنی تغییرات جریان را $I=F(f)$ با خط $y = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$ قطع می‌کنیم. این خط منحنی $I=F(f)$ را در دو نقطه‌ی f_L و f_H قطع می‌کند. محدوده‌ی فرکانسی $f_H - f_L$ را **پهنای باند** می‌گویند.

$$B.W = f_H - f_L \qquad (۶\_۳۱)$$

f_H را **فرکانس قطع بالا** و f_L را **فرکانس قطع پایین** می‌گویند. از خصوصیات مهم f_H و f_L آن است که فرکانس تشدید f_r در میان f_H و f_L قرار دارد؛ به طوری که:

$$f_r = \frac{f_H + f_L}{2} \qquad (۶\_۳۲)$$

اگر توان ماکزیمم را به صورت $P_m = I_m^2 . R$ در نظر بگیریم، مقدار توان در f_L و f_H به قرار زیر محاسبه خواهد شد. P_m توان مدار به ازای I_m (جریان در حالت تشدید) است.

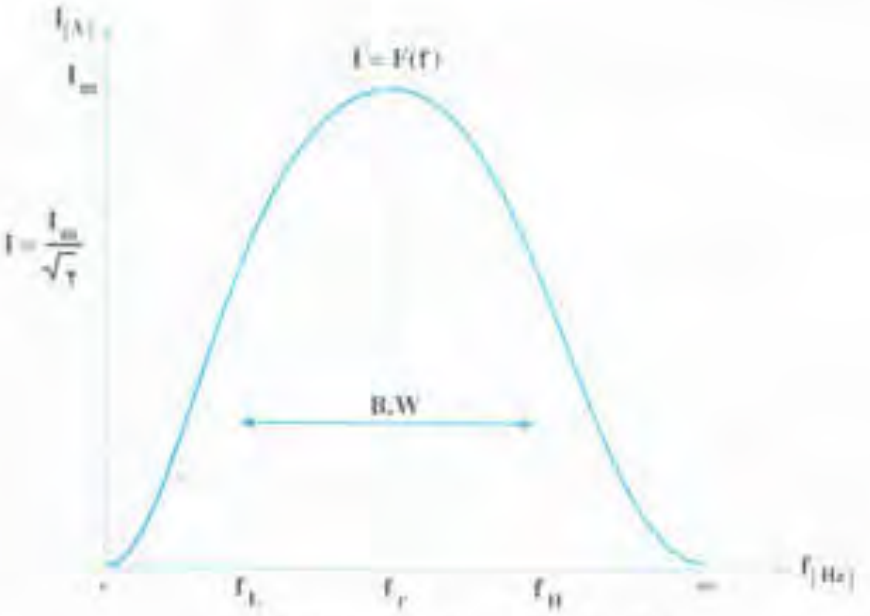
$$P_{H,L} = I^2 \times R = \left(\frac{I_m}{\sqrt{2}}\right)^2 \times R = \frac{I_m^2 R}{2} = \frac{P_m}{2} \qquad (۶\_۳۳)$$

رابطه‌ی ۶ـ۳۳ بیان می‌کند که در فرکانس قطع بالا و پایین، توان مصرفی نصف توان در حالت تشدید است. به همین دلیل، فرکانس‌های f_L و f_H را **فرکانس‌های نیم توان** نیز می‌گویند.

بین پهنای باند و فرکانس تشدید رابطه‌ی ۶ـ۳۴ برقرار است.

$$B.W = \frac{f_r}{Q_0} \qquad (۶\_۳۴)$$

در شکل ۶ـ۲۰ مشاهده می‌کنید، مدار R-L-C سری برای فرکانس‌های بین f_L و f_H، جریان مدار از مقدار $\frac{I_m}{\sqrt{2}}$ بیش‌تر است. به عبارت دیگر، تابع $I = F(f)$ در محدوده‌ی $f_H - f_L$ از مقدار بیش‌تری برخوردار است. بدین علت، به این نوع مدارها **فیلترهای میان‌گذر** می‌گویند که در مدارهای مخابراتی و الکترونیکی کاربرد فراوانی دارد.



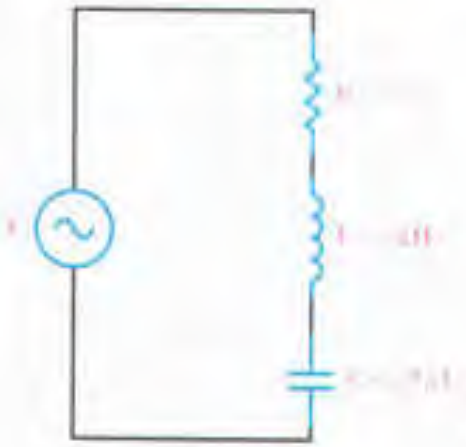
شکل ۲۰ ــ ۶ ــ پهنای باند مدار R-L-C سری

مثال ۶ــ۶: در مدار شکل ۲۱ــ۶ مطلوب است:

الف ــ فرکانس رزنانس.

ب ــ پهنای باند.

پ ــ فرکانس‌های نیم توان.



شکل ۲۱ــ ۶

راه حل:

الف ــ

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{0/5\times 0/4\times 10^{-6}}}$$

$$f_r = 356\,Hz$$

ب ــ

$$B.W = \frac{f_r}{Q_s}$$

$$Q_s = \frac{L\omega_r}{R} = \frac{2\pi f_r L}{R} = \frac{2\times 3/14\times 356\times 0/5}{100} = 11/18$$

پ ــ

$$B.W = \frac{356}{11/18} = 31/8\,Hz$$

$$f_H = f_r + \frac{B.W}{2} = 356 + \frac{31/8}{2} = 372\,Hz$$

$$f_L = f_r - \frac{B.W}{۲} = ۳۵۶ - \frac{۳۱/۸}{۲} = ۳۴۰/۱Hz$$

۶ــ۶ــ رزنانس در مدارهای R-L-C موازی

شکل ۷ــ۶ را در نظر می‌گیریم. اگر عناصر R، C و L ثابت باشند، با تغییر فرکانس، مدار امپدانس و جریان مدار تغییر می‌کند. اگر فرکانس مدار صفر باشد، جریان I جریان اتصال کوتاه خواهد بود؛ زیرا $X_L = ۲\pi fL$ برابر صفر می‌شود. چون اتصال موازی عناصر را در مدار R-L-C موازی داریم، هر کدام از عناصر R ، X_L و X_C صفر شوند، از مدار جریان اتصال کوتاه (∞) عبور خواهد کرد. وقتی فرکانس رشد می‌کند، $X_L = ۲\pi fL$ افزایش و $X_C = \frac{۱}{۲\pi fc}$ کاهش می‌یابد. در فرکانس f_r (فرکانس تشدید) $X_L = X_C$ می‌شود. در این حالت، با توجه به رابطه‌ی $\frac{۱}{Z^۲} = \frac{۱}{R^۲} + \left(\frac{۱}{X_L} - \frac{۱}{X_C}\right)^۲$، مقدار $Z = R$ و جریان مدار $I = \frac{V}{R}$ می‌شود. این مقدار جریان، حداقل جریانی است که در مدار برقرار می‌شود. در حالت تشدید مدار R-L-C موازی (L و C)، دو شاخه‌ی باز شده محسوب می‌شوند. در فرکانس‌های زیاد با این که $X_L = ۲\pi fL$ زیاد می‌شود ولی $X_C = \frac{۱}{۲\pi fc}$ به اتصال کوتاه می‌رود. به گونه‌ای که در فرکانس $f \to \infty$، $X_C = ۰$، مدار مجدداً اتصال کوتاه می‌شود و جریان اتصال (∞) از مدار عبور خواهد کرد. چون امپدانس مدار در تغییر فرکانس تغییر می‌کند، کمیت‌های وابسته به آن ــ یعنی، I، P_q، P_p، $\cos\varphi$، $\sin\varphi$ و φ نیز تغییر می‌کنند.

در فرکانس تشدید می‌توان نوشت:

$$X_L = X_C$$

$$۲\pi f_r L = \frac{۱}{۲\pi f_r c}$$

$$(۲\pi f_r)^۲ = \frac{۱}{LC} \Rightarrow f_r = \frac{۱}{۲\pi\sqrt{LC}} \qquad (۶\_۳۵)$$

با مقایسه‌ی رابطه‌ی ۳۴ــ۶ و ۳۵ــ۶ نتیجه می‌گیریم که فرکانس تشدید در حالت R-L-C سری و موازی یکسان هستند.

تابع تغییرات $Z = F(f)$ و $I = F(f)$ در شکل‌های ۲۲ــ۶ رسم شده‌اند.

$I_{(A)}$

f	Z	I
۰	۰	∞
f_r	R	$\frac{V}{R}$
∞	۰	∞

$I = F(f)$

$\frac{V}{R}$

$f_{(Hz)}$

۰ f_r

الف: تابع تغییر جریان در اثر فرکانس مدار
R-L-C موازی

$Z_{(\Omega)}$

R

$Z = F(f)$

ب:تابع تغییرات امپدانس در اثر فرکانس
مدار R-L-C موازی

$f_{(Hz)}$

۰ f_r ∞

شکل ۲۲ــ۶

۱ــ۶ــ۶ــ پهنای باند و ضریب کیفیت مدار R-L-C موازی: برای تعیین پهنای باند، منحنی $Z = F(f)$ را با خط $y = \frac{Z}{\sqrt{2}}$ شکل ۲۳ــ۶ قطع می‌کنند. با مقایسه‌ی شکل ۲۰ــ۶ و ۲۳ــ۶ می‌توان نتیجه گرفت که مدار R-L-C سری برای فرکانس‌های محدوده‌ی پهنای باند، امپدانس ورودی کم ولی مدار R-L-C موازی در این محدوده‌ی فرکانسی، امپدانس ورودی زیادی نشان می‌دهد. از این لحاظ مدار R-L-C موازی به عنوان فیلترهای میان‌نگذر مورد استفاده قرار می‌گیرد.

$Z_{(\Omega)}$

$Z = R$

$y = \frac{Z}{\sqrt{2}}$

B.W

$Z = F(f)$

$f_{(Hz)}$

۰ f_1 f_r f_2 ∞

شکل ۲۳ــ۶

برای محاسبه‌ی پهنای باند می‌توان نوشت :

$$\boxed{B.W = f_H - f_L}$$

با توجه به شکل ۴ـ۶ در حالتی که جریان در C و L ماکزیمم است، ولتاژ صفر و برعکس، در حالتی که ولتاژ ماکزیمم است، جریان صفر است. بنابراین، در حالتی که $V_{Cm} = V_C$ است، $I_L = ۰$ خواهد بود و می‌توان نوشت :

$$Q = \frac{۲\pi(\text{ماکزیمم انرژی ذخیره شده})}{\text{انرژی مصرفی در یک سیکل}}$$

$$Q = \frac{۲\pi (W_L + W_C)_{max}}{I_e^۲.R.T} = \frac{۲\pi\left(\frac{۱}{۲}V_{Cm}^۲C\right)}{I_e^۲.R.T}$$

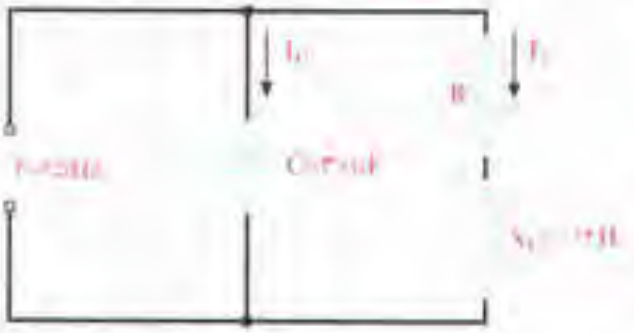
چون مدار موازی است، $V_R = V_C$ است. ازآن‌جا که $V_R = I.R$ است، می‌توان نوشت :

$$Q = \frac{۲\pi\left(\frac{۱}{۲}\times C\times I_e^۲R^۲\right)}{I_e^۲\times R\times\frac{۲\pi}{\omega}} = RC\omega \qquad (۶\_۳۶)$$

$$Q_s = RC\omega_r \qquad (۶\_۳۷)$$

$$\boxed{B.W = \frac{f_r}{Q_s}} \qquad (۶\_۳۸)$$

مثال ۷ـ۶ :در مدار الکتریکی شکل ۲۴ـ۶ به ازای چه مقدار مقاومت R، مدار به حالت رزنانس درمی‌آید؟ اگر $R = ۵۰$ باشد، رزنانس مدار در چه فرکانسی برقرار خواهد شد؟



شکل ۲۴ـ۶

راه حل: در مدار وقتی حالت تشدید برقرار خواهد شد که هیچ‌گونه توان راکتیو مصرف نشود. به عبارت دیگر، مقدار جریان راکتیو صفر شود.

$$I_۱ = \frac{V}{\sqrt{R^۲ + X_L^۲}}$$

$$X_L = ۲\pi fL = ۲\times ۳/۱۴\times ۶۵\times ۰/۲ = ۸۱/۶۴\ [\Omega]$$

$$I_1 = \frac{V}{\sqrt{R^2 + 81/64^2}}$$

$$\cos\varphi_1 = \frac{R}{\sqrt{R^2 + 81/64^2}} \quad , \quad \sin\varphi_1 = \frac{81/64}{\sqrt{R^2 + 81/64^2}}$$

$$I_{d_1} = I_1 \sin\varphi_1 = \frac{V}{\sqrt{R^2 + 81/64^2}} \times \frac{81/64}{\sqrt{R^2 + 81/64^2}}$$

$$I_{d_1} = \frac{81/64V}{R^2 + 81/64^2}$$

$$I_C = \frac{V}{X_C} = \frac{V}{\frac{1}{C\omega}} = VC\omega = V \times 30 \times 10^{-6} \times 2 \times 3/14 \times 65$$

$$I_C = 0/0122|A|$$

اگر $I_C = I_{d_1}$ شود، مدار در حال تشدید خواهد بود.

$$0/0122 = \frac{81/64}{R^2 + 81/64^2}$$

$$0/0122R^2 + 81/31 = 81/64 \Rightarrow R = 5/2\Omega$$

$$VC\omega = I_C \Rightarrow I_C = V \times 30 \times 10^{-6} \times \omega$$

$$I_{d_2} = \frac{V}{\sqrt{50^2 + (0/2\omega)^2}} \times \frac{0/2\omega}{\sqrt{50^2 + (0/2\omega)^2}}$$

$$V \times 30 \times 10^{-6}\omega = \frac{0/2V\omega}{50^2 + (0/2\omega)^2}$$

$$30 \times 10^{-6}(50^2 + 0/04\omega^2) = 0/2$$

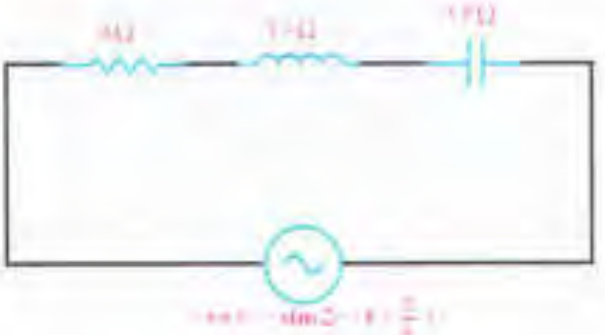
$$\omega^2 = 10416$$

$$\omega = 322/7 \text{ rad/s}$$

$$f_r = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{322/7}{2 \times 3/14} = 51/4\text{Hz}$$

۷ــ۶ــ تمرین‌ها

۱ــ در مدار شکل مقابل مطلوب است:



الف ــ امپدانس مدار.

ب ــ جریان منبع و معادله‌ی زمانی آن.

پ ــ ولتاژ دوسر هر المان.

ت ــ دیاگرام برداری جریان و ولتاژها.

۲ــ در مدار شکل مقابل مطلوب است:

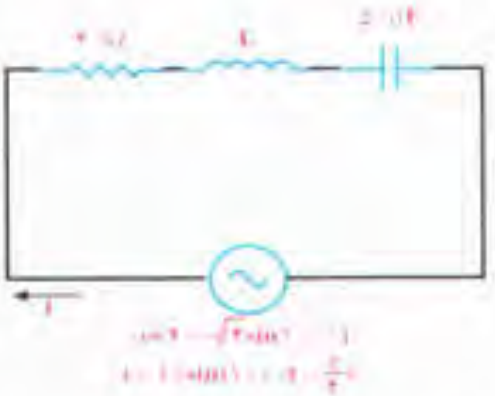
الف ــ امپدانس مدار.

ب ــ معادله‌ی ولتاژ منبع.

پ ــ توان‌ها و مثلث توان.

۳ــ در یک مدار R-L-C سری $i = ۲۰\sqrt{۲}\sin ۲۰۰۰t$ ، $v = ۱۰۰\sqrt{۲}\sin(۲۰۰۰t + ۵۳^\circ)$ و $v_L = ۱۸۰\sqrt{۲}\sin(۲۰۰۰t + \frac{\pi}{۲})$ است. مطلوب است اندازه‌ی R ، L و C .

۴ــ در مدار شکل مقابل مطلوب است:

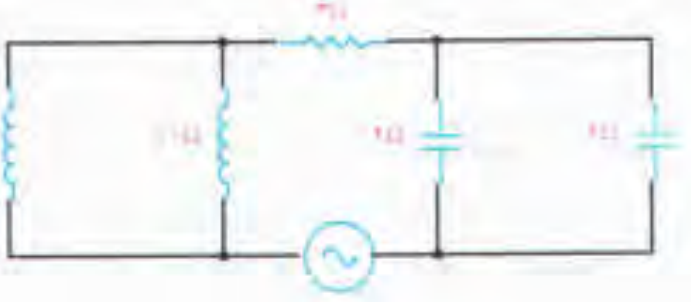


الف ــ اندازه‌ی L .

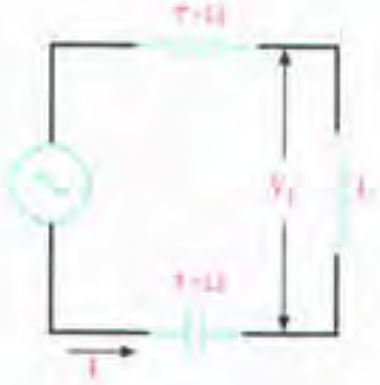
ب ــ اختلاف پتانسیل دوسر هر المان.

۵ــ یک مدار R-L-C سری با $L = ۰/۰۱H$ و معادله‌ی ولتاژ و جریان منبع به ترتیب $v = ۱۰۰\sqrt{۲}\sin(۱۰۰۰t + \frac{\pi}{۳})$ و $i = ۱۰\sin(۱۰۰۰t + ۱۰۵^\circ)$ است. اندازه‌ی R و C چه‌قدر است؟

۶ــ در مدار شکل زیر معادله‌ی ولتاژ منبع $v = ۵۰\sqrt{۲}\sin ۴۰۰t$ است. مطلوب است معادله‌ی زمانی جریان منبع.



۷ــ در مدار مقابل $V_R = ۴۵$ ولت است. معادله‌ی ولتاژ و جریان منبع را به‌دست آورید.



۸ــ در مدار مقابل $V_L = ۶۰۰V$ و $I = ۱۰A$ است. ولتاژ منبع چند ولت است؟

۹ــ فرکانس رزنانس و نیم‌توان بالای مدار مقابل را به‌دست آورید.

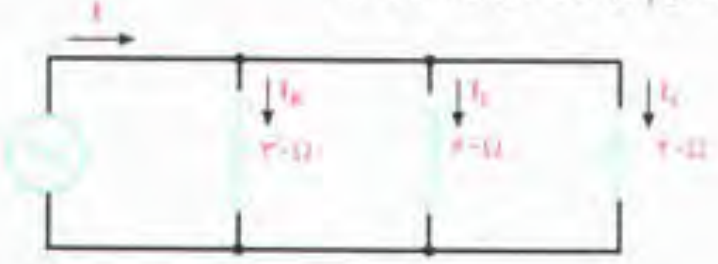
۱۰ــ در مدار شکل مقابل اگر $v = ۱۲۰\sin ۴۰۰t$ باشد مطلوب است :

الف ــ جریان شاخه‌ها و معادلات آن‌ها.

ب ــ جریان منبع و معادله‌ی آن.

پ ــ امپدانس مدار.

ت ــ رسم دیاگرام برداری جریان‌ها و ولتاژ.

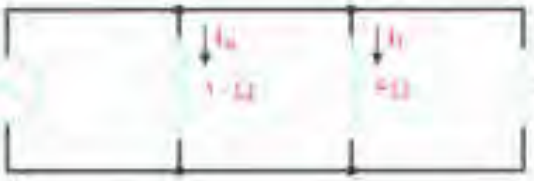


۱۱ــ در مدار شکل مقابل $i_R = ۶\sin ۱۰۰۰t$ است. مطلوب است :

الف ــ ولتاژ منبع و معادله‌ی آن.

ب ــ جریان منبع و معادله‌ی آن.

پ ــ توان‌های مصرفی و مثلث توان.



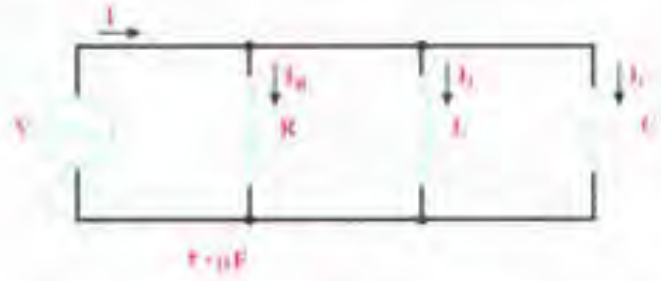
ت ــ ضریب قدرت کل شبکه.

۱۲ــ در مدار شکل زیر $v = ۲۰۰\sin ۵۰۰t$ و $i = ۱۰\sqrt{۲}\sin(۵۰۰t - \varphi)$ است. مطلوب است اندازه‌ی C برحسب میکرو فاراد و φ برحسب رادیان.

۱۳ــ درمدار زیر $v = ۱۰۰\sin ۲۵۰۰t$، $i = ۵\sin(۲۵۰۰t + \frac{\pi}{۴})$ و $i_C = ۱۰\sin(۲۵۰۰t + \frac{\pi}{۲})$ می‌باشد. مطلوب است :

الف ــ اندازه‌ی R ، L و C .

ب ــ معادله‌ی جریان هر شاخه.



۱۴ــ در مدار R-L-C موازی روبه‌رو مطلوب است :

الف ــ فرکانس رزنانس.

ب ــ ضریب کیفیت.

پ ــ پهنای باند.

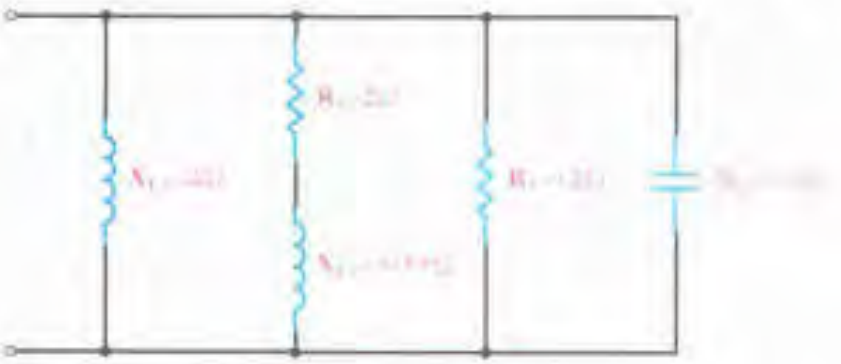
ت ــ فرکانس‌های نیم‌توان.

۱۵ــ یک مدار R-L-C موازی را به یک مدار سری در حالت زیر تبدیل کنید.

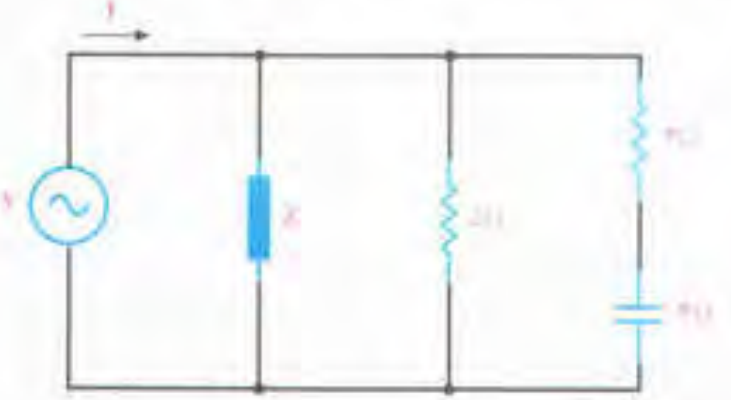
الف ــ $X_L > X_C$

ب ــ $X_C > X_L$

۱۶ــ امپدانس و ضریب توان شکل زیر را به‌دست آورید.



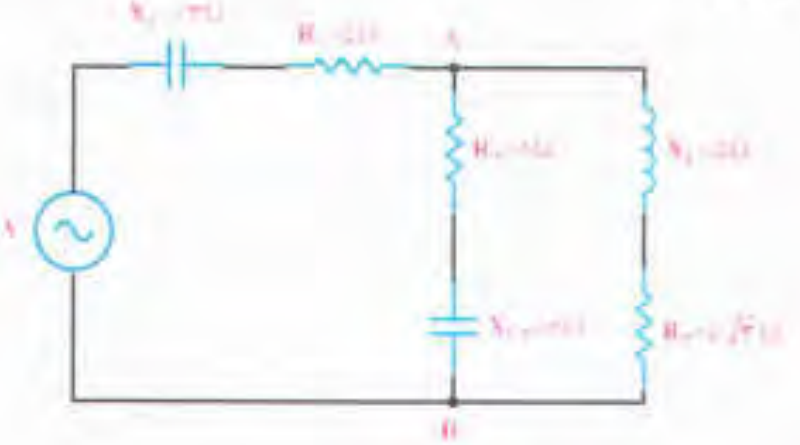
۱۷ــ در مدارالکتریکی شکل زیر اگر مقدارجریان برابر۲۷/۹آمپر و $\theta_1 = ۵۷/۸$ و مقدار ولتاژ برابر ۵۰ ولت و $\theta_2 = ۳۰^\circ$ باشد، امپدانس Z را به‌دست آورید.

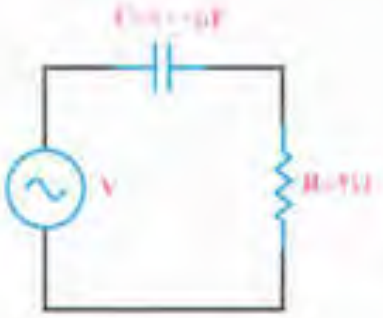


۱۸ــ در مدار الکتریکی شکل زیر اگر ولتاژ مؤثر دو نقطه‌ی B و A برابر ۵۰ ولت باشد، مطلوب است:

۱) ولتاژ کل

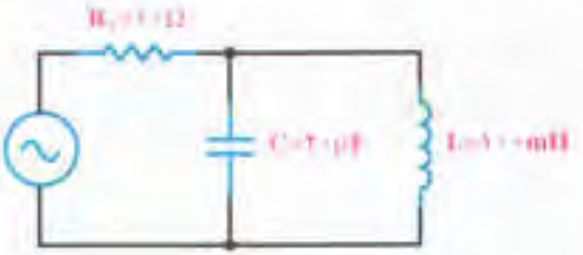
۲) مثلث توان‌ها





۱۹ــ شکل مقابل یک مدار R-C را نشان می‌دهد. این مدار به عنوان یک فیلتر به کار می‌رود. محدوده‌ی فرکانسی این مدار را معین کنید.

۲۰ــ فرکانس تشدید شکل زیر را به‌دست آورید.



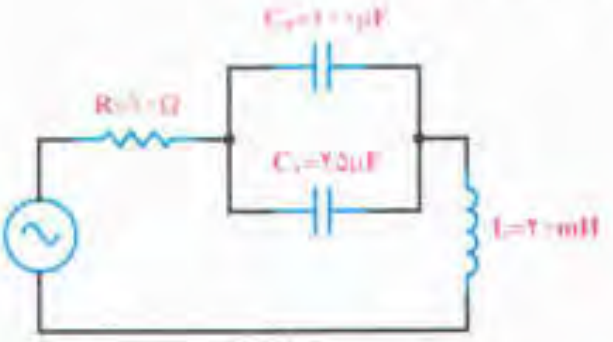
۲۱ــ در مدارات شکل‌های زیر مطلوب‌است :

الف ــ فرکانس تشدید.

ب ــ ضریب کیفیت در حالت رزنانس.

پ ــ پهنای باند.

ت ــ فرکانس‌های نیم توان.



(الف)

(ب)

فصل هفتم

جریان‌های سه فازه

هدف‌های رفتاری: در پایان این فصل از دانش‌آموز انتظار می‌رود :

۱ــ جریان‌های سه فاز را تعریف و مشخصات آن‌ها را با رسم دیاگرام بیان کند.

۲ــ مفاهیم ولتاژهای خطی و فازی و جریان‌های خطی و فازی را در اتصال ستاره و مثلث بیان کند.

۳ــ جریان‌ها و ولتاژها را در مصرف کننده‌های سه فاز متعادل با اتصال ستاره و مثلث محاسبه کند.

۴ــ جریان‌ها و ولتاژها را در مصرف کننده‌های سه فاز نامتعادل در سیستم‌های چهار سیمه و در اتصال ستاره محاسبه کند.

۵ ــ توان‌های مؤثر و غیر مؤثر و ظاهری و هم‌چنین ضریب توان را در بارهای متعادل و نامتعادل و در اتصالات ستاره و مثلث متعادل محاسبه کند .

۶ــ اثر قطع یک فاز و تعویض جای دو فاز را بر روی مصرف کننده تشریح کند.

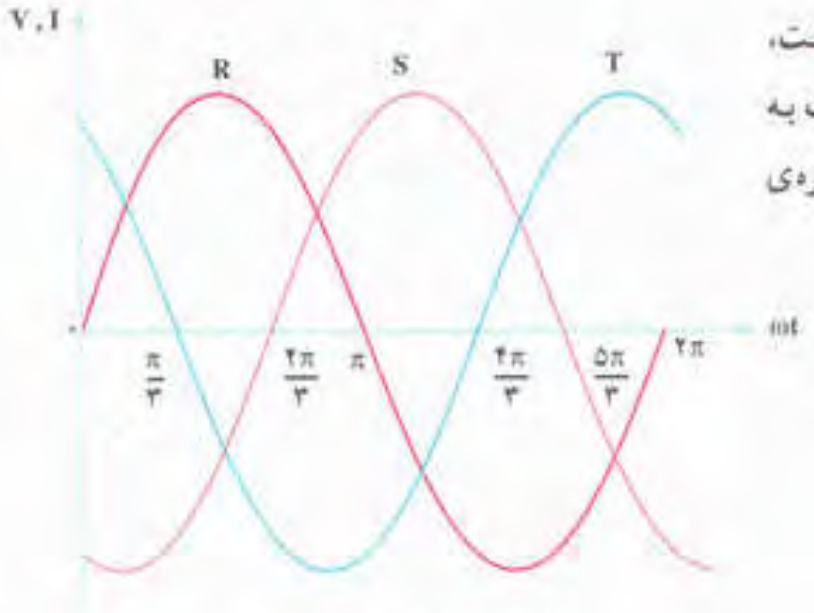
۷ــ اثر قطع نول در بارهای سه فاز نامتعادل سه سیمه با اتصال ستاره را شرح دهد.

۱ــ۷ــ مقدمه

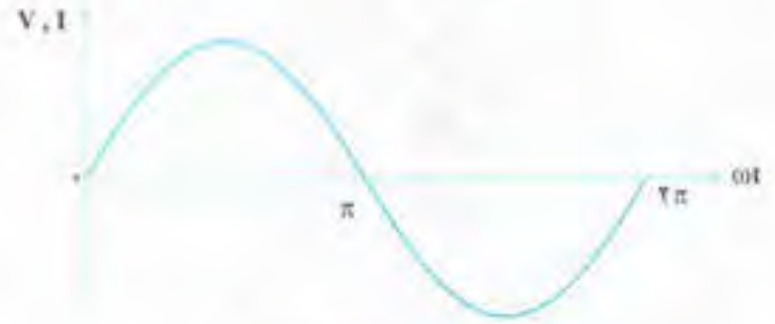
ساختمان ساده‌ی مولدهای جریان متناوب سه فاز موجب شده است که انرژی الکتریکی در شکل سه فاز ، راحت‌تر و ارزان‌تر تولید شود. جریان متناوب سه‌فاز، علاوه بر سادگی تولید و ارزان بودن و برخورداری از کلیه‌ی خواص جریان یک فاز، مزایای دیگری نیز دارد. مزایای برق سه فاز نسبت به یک فاز را می‌توان به صورت زیر دسته‌بندی کرد :

۱ــ توان الکتریکی در مصرف کننده‌های سه فاز هیچ وقت صفر نمی‌شود ؛ زیرا با توجه به‌شکل ۱ــ۷، وقتی در یکی از فازها دامنه‌ی جریان یا ولتاژ صفر می‌شود، مصرف‌کننده از دو فاز

دیگر انرژی می‌گیرد . بدین علت، مصرف‌کننده‌های سه فاز نسبت به مصرف‌کننده‌های یک‌فاز ضریب بهره‌ی بالایی دارند.



الف: جریان متناوب سه فاز



ب: جریان متناوب یک‌فاز

شکل ۱ـ۷

۲ـ ضربان موج یکسو شده‌ی سه فاز نسبت به موج یکسو شده‌ی یک فاز، بسیار کم‌تر است. به عبارت دیگر، جریان سه‌فاز نسبت به جریان یک‌فاز پس از یکسوسازی، موج صاف‌تری ایجاد می‌کند. در شکل‌های ۲ـ۷ دو جریان یکسوشده‌ی سه‌فاز و یک‌فاز تمام موج نشان داده شده است.

برق یکسو شده‌ی تمام موج یک‌فاز

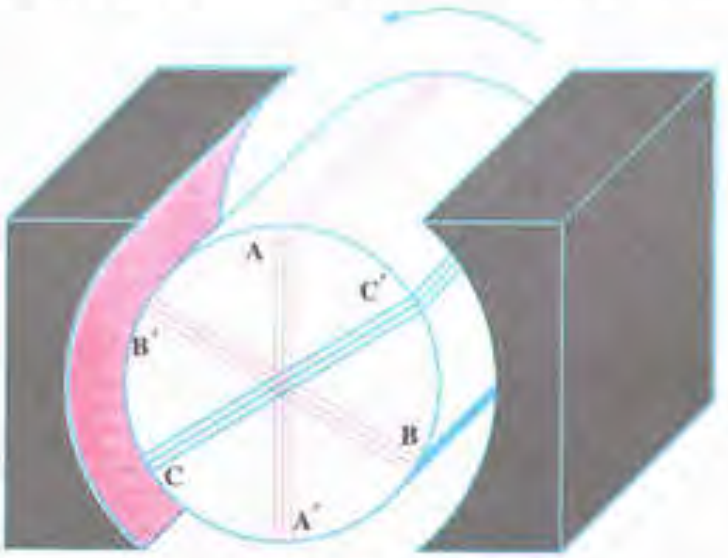
برق یکسو شده‌ی تمام موج سه فاز

شکل ۲ـ۷

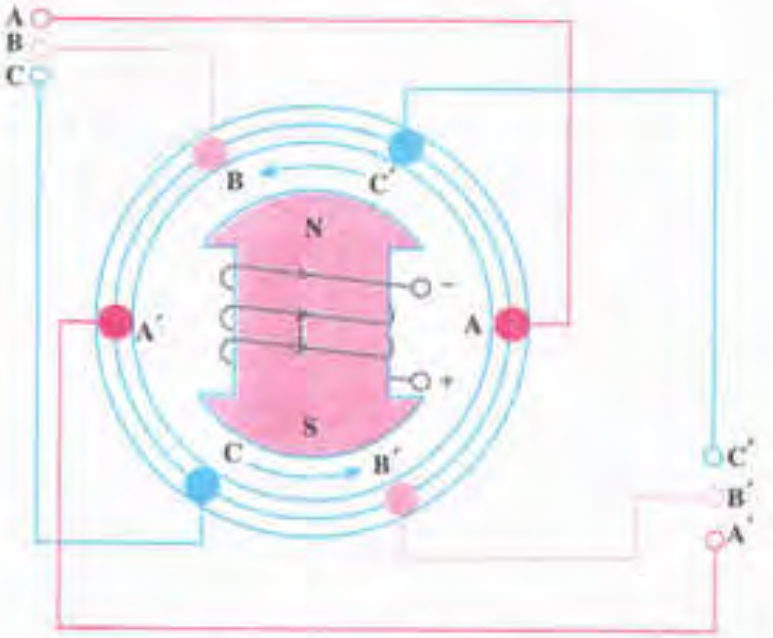
۳ـ جریان متناوب سه فاز در مصرف‌کننده‌های سه فاز مانند موتورهای الکتریکی سه فاز، حوزه‌ی دوار مغناطیسی ایجاد می‌کند. این حوزه‌ی دوار، قسمت متحرک را به دنبال خود می‌کشد. در صورتی که در جریان متناوب یک‌فاز حوزه‌ی دوار تشکیل نشود، این موتورها مشکل راه‌اندازی خواهند داشت و برای راه‌اندازی نسبت به موتورهای سه فاز به اجزایی اضافی نیاز دارند که قیمت تمام شده‌ی موتورهای یک‌فاز را نسبت به موتورهای سه فاز بالا می‌برد.

۲ـ۷ـ تولید جریان متناوب سه فاز

شکل‌های ۳ـ۷، دو نمونه مولد سه فاز جریان متناوب را به طور شماتیک نشان می‌دهند.



الف: مولد سه فاز القاکننده‌استاتور



ب: مولد سه فاز القاکننده رتور

شکل ۳ـ۷

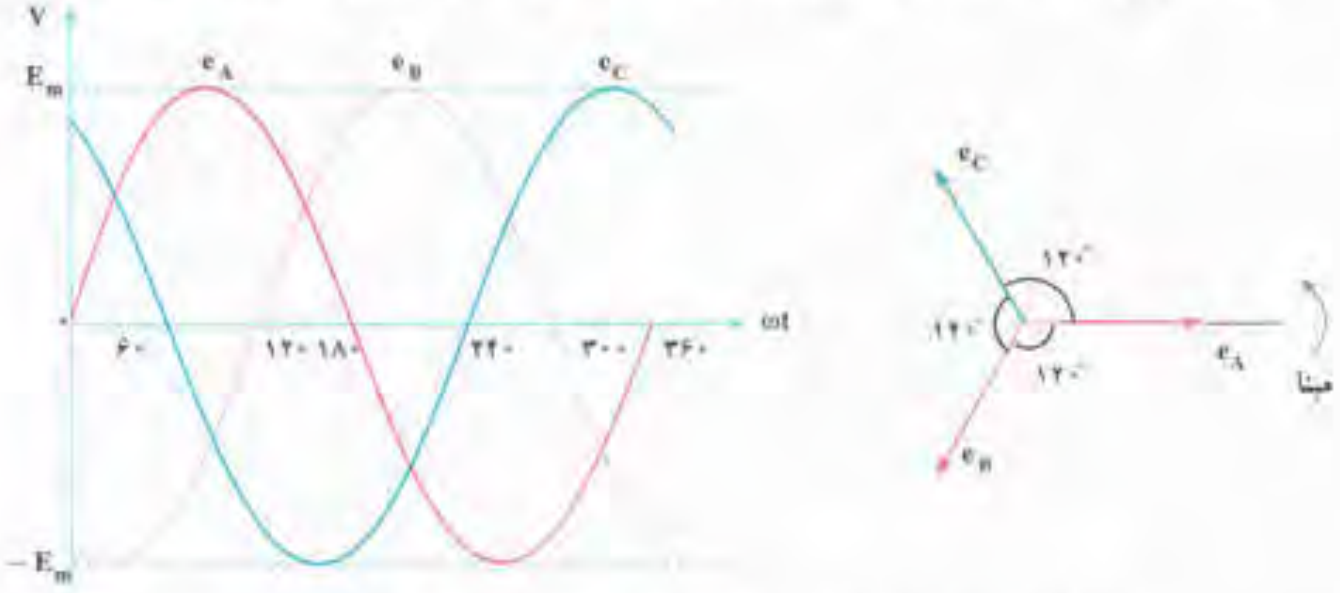
در هر دو شکل ۳ـ۷، وقتی رتور در جهت مثلثاتی (عکس عقربه‌های ساعت) به گردش درمی‌آید، خطوط قوای مغناطیسی، در هریک از سیم‌پیچ‌های AA'، BB' و CC' یک نیروی محرکه‌ی سینوسی القا می‌کند. با توجه به موقعیت مکانی سیم‌پیچ‌ها، ولتاژ القایی در سیم‌پیچ BB' نسبت به ولتاژ القایی در سیم‌پیچ AA' به‌اندازه‌ی 120° الکتریکی پس‌فاز است. هم‌چنین ولتاژ القایی در سیم‌پیچ CC' به‌اندازه‌ی 240° الکتریکی نسبت به ولتاژ سیم‌پیچ AA' پس‌فاز است. معادلات زمانی نیروهای محرکه‌ی القایی در سیم‌پیچ‌ها به قرار زیر است.

$$e_A = E_m \sin \omega t \qquad (۷ـ۱)$$

$$e_B = E_m \sin(\omega t - 120^\circ) \qquad (۷ـ۲)$$

$$e_C = E_m \sin(\omega t - 240) = E_m \sin(\omega t + 120^\circ) \qquad (۷ـ۳)$$

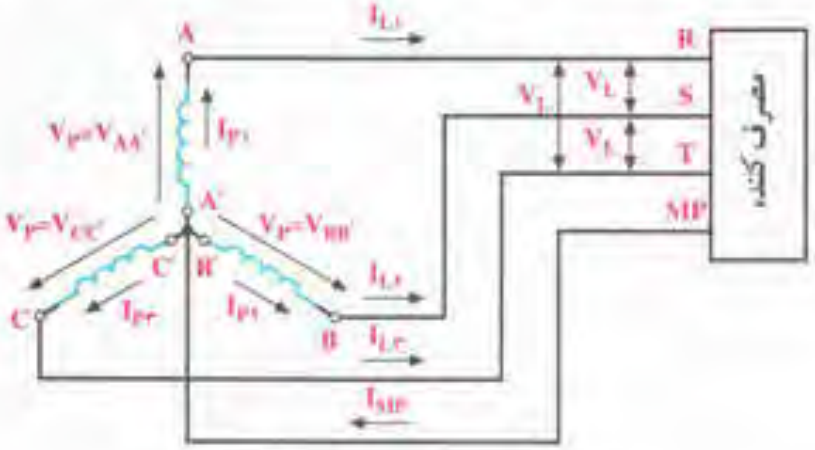
دیاگرام پرداری و منحنی تغییرات نیروهای محرکه‌ی الکتریکی القا شده در سیم پیچ‌ها به‌صورت شکل ۴ـ۷ رسم می‌شوند. همان‌طور که در شکل‌های ۳ـ۷ مشاهده می‌کنید، در مولّدهای سه فاز، سه گروه سیم‌پیچ AA'، BB' و CC' وجود دارد که در داخل ماشین 120° درجه نسبت به یک‌دیگر



شکل ۴ـ۷ـ منحنی تغییرات نیروهای محرکه‌ی القایی در سیم‌پیچ‌ها و دیاگرام برای آن‌ها

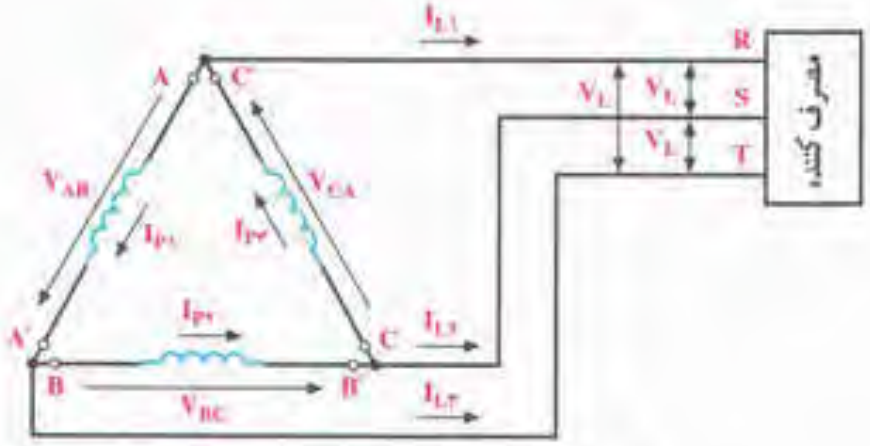
اختلاف فاز مکانی دارند. انرژی الکتریکی تولید شده در این سیم‌پیچ‌ها با دو روش اتصال سیم پیچ‌ها به شبکه‌ی مصرف انتقال می‌یابد. به عبارت دیگر، به دو روش می‌توان انرژی تولیدی را از مولد به مصرف کننده انتقال داد. در روش اوّل سه سیم انتهایی $A'B'C'$ با هم یکی شده و با یک سیم به بیرون مولد هدایت می‌شوند. در تولید صنعتی برق در نیروگاه‌ها، با زمین کردن این سیم، اختلاف پتانسیل آن را با زمین یکی می‌کنند و آن را سیم نول می‌نامند و با MP یا N نشان می‌دهند. سیم MP

همراه با سه سیم A، B و C مطابق شکل۵ــ۷ انرژی را از مولد به مصرف‌کننده انتقال می‌دهد. سیم‌های A، B و C را به ترتیب R، S و T یا R، Y و B یا L_1، L_2 و L_3 نیز نام‌گذاری می‌کنند و به آن‌ها سیم‌های فاز A، فاز B و فاز C می‌گویند. این سیستم انتقال را انتقال چهار سیمه و نوع اتصال سیم‌پیچ‌های مولد را **اتصال ستاره** گویند و آن را با نماد (سمبل) Yیا λ (لاندا) نشان می‌دهند. اگر در انتقال سیم نول حذف شود، انتقال را انتقال ستاره‌ی سه سیمه گویند.



شکل ۵ــ۷ــ اتصال ستاره، انتقال چهار سیمه

در روش دوم انتقال انرژی، انتهای سیم‌پیچ AA′ یعنی A′ را به ابتدای سیم‌پیچ BB′ یعنی B، انتهای سیم‌پیچ BB′ را یعنی B′ را به ابتدای سیم‌پیچ CC′ یعنی C و انتهای سیم‌پیچ CC′ یعنی C′ را به ابتدای سیم‌پیچ AA′ یعنی A وصل می‌کنند و انرژی تولیدی مولد را با سه سیم A، B و C یا R، S و T، به مصرف‌کننده‌ها مطابق شکل ۶ــ۷ انتقال می‌دهند. این روش انتقال را **انتقال سه سیمه** و نوع اتصال سیم‌پیچ‌های مولد را **اتصال مثلث** می‌گویند و با نماد Δ یا D (دلتا) نشان می‌دهند.



شکل ۶ــ۷ــ انتقال سه سیمه، اتصال مثلث

۱ـ۲ـ۷ـ جریان و ولتاژ فازی:

تعریف ولتاژ فازی: ولتاژ دو سر هر یک از سیم‌پیچ‌های AA' ، BB' و CC' را **ولتاژ فازی** گویند و آن‌را با V_P نشان می‌دهند.

در مولدهای سه فاز به علت این که همه‌ی مشخصات سیم‌پیچ‌ها یکسان است، ولتاژ مؤثر سیم‌پیچ‌ها برابرند.

تعریف جریان فازی: جریان عبوری از داخل هر سیم‌پیچ را **جریان فازی** گویند و آن‌را با I_P نشان می‌دهند.

۲ـ۲ـ۷ـ ولتاژ و جریان خطی:

تعریف ولتاژ خطی: ولتاژ بین خطوط R با S یا (V_{RS}) S با T یا (V_{ST}) T با R یا (V_{TR}) را **ولتاژ خطی** گویند و آن را با V_L نشان می‌دهند. در واقع ولتاژ خطی، اختلاف پتانسیل بین دو فاز مختلف است.

تعریف جریان خطی: جریانی را که در خطوط انتقال R، S و T جاری می‌شود، جریان خطی می‌گویند و آن را با I_L نشان می‌دهند.

جریان خطی و فازی و ولتاژهای خطی و فازی شکل ۵ـ۷ به‌قرار زیرند :

ولتاژ فازی $V_{AA'} = V_P = V_{RN}$

ولتاژ فازی $V_{BB'} = V_P = V_{SN}$

ولتاژ فازی $V_{CC'} = V_P = V_{TN}$

جریان‌های فازی I_{P1} ، I_{P2} ، I_{P3} =

ولتاژ خطی $V_{AB} = V_{RS} = V_L$

ولتاژ خطی $V_{BC} = V_{ST} = V_L$

ولتاژ خطی $V_{CA} = V_{TR} = V_L$

جریان‌های خطی و فازی و ولتاژهای خطی و فازی شکل ۶ـ۷ به ترتیب زیر هستند :

ولتاژ خطی= ولتاژ فازی $V_{AB} = V_P = V_L$

ولتاژ خطی= ولتاژ فازی $V_{BC} = V_P = V_L$

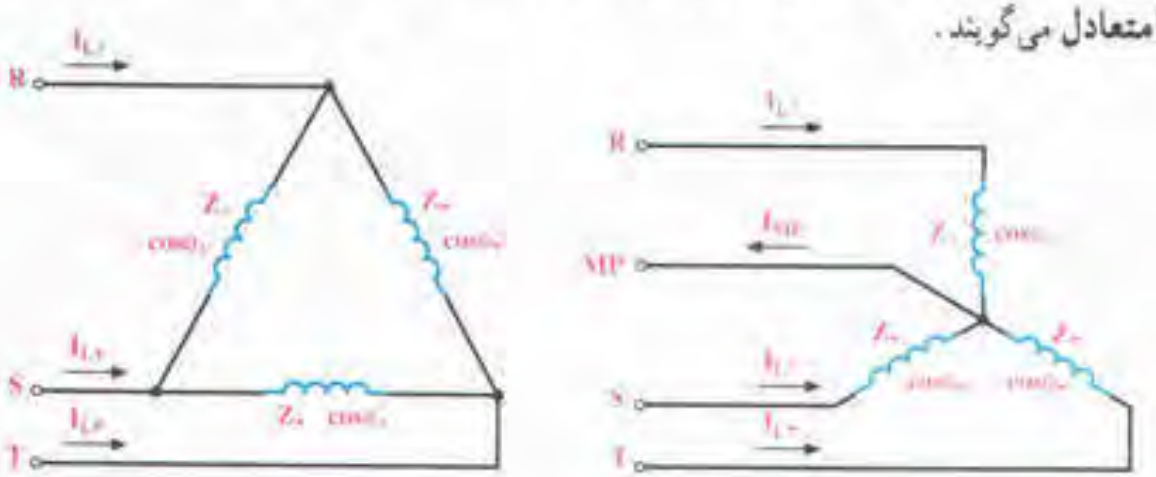
ولتاژ فازی= ولتاژ خطی $V_{CA} = V_P = V_L$

جریان خطی = I_{L1} جریان فازی= $I_{AB} = I_{P1}$

جریان خطی = I_{L2} جریان فازی= $I_{BC} = I_{P2}$

جریان خطی = I_{L3} جریان فازی = $I_{CA} = I_{P3}$

۴ــ۲ــ۷ــ بار متعادل و بار نامتعادل: سه امپدانس Z_1 ، Z_2 و Z_3 را با اتصال ستاره یا اتصال مثلث مطابق شکل ۷ــ۷ به شبکه‌ی سه فاز وصل می‌کنیم . اگر همه‌ی مشخصه‌های امپدانس‌های Z_1 ، Z_2 و Z_3 از قبیل دامنه ، زاویه‌ی فاز، پس‌فاز و پیش‌فاز بودن با هم برابر باشند، آن وقت بار شبکه‌ی سه فاز را **بار متعادل** می‌گویند. اگر یکی از مشخصه‌ها ــ مثلاً دامنه یا زاویه یا پس‌فاز یا پیش‌فاز بودن ــ در هر کدام از امپدانس‌ها تفاوت داشته باشد، بار شبکه‌ی سه فاز را **بار نامتعادل** می‌گویند.



الف : اتصال ستاره‌ی بار سه فاز به شبکه‌ی سه فاز

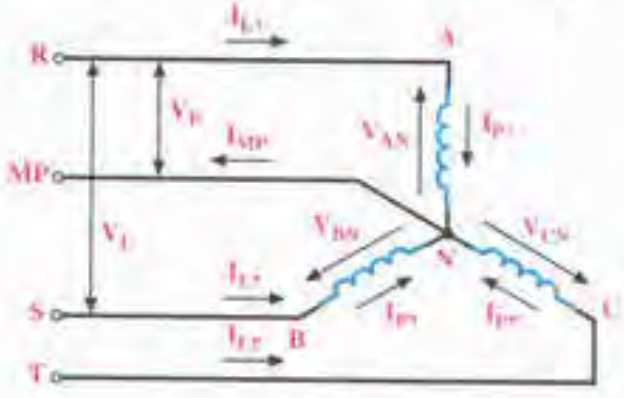
ب: اتصال مثلث بار سه فاز به شبکه‌ی سه فاز

شکل ۷ــ۷

۳ــ۷ــ اتصال ستاره

بارهای سه فاز را می‌توان با اتصال ستاره مطابق شکل ۷ــ۷ــ الف به شبکه‌ی سه فاز اتصال داد و آن را تغذیه کرد. این بارها ممکن است متعادل یا نامتعادل باشند.

۱ــ۳ــ۷ــ اتصال ستاره و بار متعادل: سه امپدانس مساوی Z با زاویه‌ی فاز $\varphi = \tan^{-1}\frac{R}{X}$ که تمام مشخصات آن‌ها با هم برابر است، مطابق شکل ۸ ــ۷ به شبکه‌ی سه فاز اتصال دارد. چون بارها متعادل‌اند، جریان‌های دریافتی آن‌ها از شبکه نیز با هم برابر خواهد بود. بنابراین $I_{p_1} = I_{p_2} = I_{p_3} = I_p$ است. به طوری که در شکل ۸ــ۷ مشاهده می‌کنید، جریان‌های خطوط همان جریان‌های فازهاست. پس در اتصال ستاره می‌توان



شکل ۸ ــ۷

نوشت :

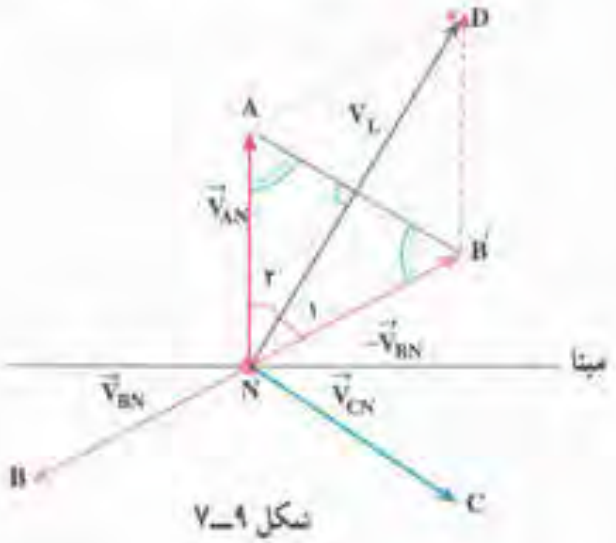
$$I_L = I_P \qquad (۷\_۴)$$

در اتصال ستاره در بار متعادل اندازه‌ی جریان فازی یا خطی از رابطـه‌ی ۵ـ۷ به دست می‌آید.

$$I_L = I_P = \frac{V_P}{Z}, V_P = V_{AN} = V_{BN} = V_{CN} \qquad (۷\_۵)$$

۲ـ۳ـ۷ـ محاسبه‌ی ولتاژ خطی (V_L) در اتصال ستاره: با توجه به شکل ۸ـ۷، برای محاسبه‌ی ولتاژ خطی از یک نقطه‌ی اختیاری مانند N واقع در خارج شکل، برایند بردارهای $\vec{V}_{AN}$، $\vec{V}_{BN}$ و $\vec{V}_{CN}$ را مطابق شکل ۹ـ۷ رسم می‌کنیم. ولتاژ خطی $\vec{V}_{AB}$ از دو بردار $\vec{V}_{AN}$ و $\vec{V}_{NB}$ به دست می‌آید ؛ بنابراین :

$$\vec{V}_L = \vec{V}_{AB} = \vec{V}_{AN} + \vec{V}_{NB} = \vec{V}_{AN} - \vec{V}_{BN} \qquad (۷\_۶)$$



شکل ۹ـ۷

برای محاسبه‌ی V_L کافی است منفی بردار $\vec{V}_{BN}$ را به دست آوریم و با بردار $\vec{V}_{AN}$ جمع کنیم، بدین منظور $\vec{V}_{BN}$ را در خلاف جهت خود به اندازه‌ی خودش امتداد می‌دهیم تا بردار $\vec{NB'}$ که همان $-\vec{V}_{BN}$ است، به دست آید. زاویه‌ی بین دو بردار $-\vec{V}_{BN}$ و $\vec{V}_{AN}$ برابر ۶۰ درجه است. برایند دو بردار $-\vec{V}_{BN}$ و $\vec{V}_{AN}$ بردار $\vec{ND}$ است. دامنه‌ی بردار $\vec{ND}$ در واقع برابر ولتاژ خطی است. چهار ضلعی ANDB′ یک لوزی است . چون اضلاع آن موازی و برابرند، هر ضلع آن برابر ولتاژ $|\vec{V}_{BN}| = |\vec{V}_{AN}| = V_P$ است . ND قطر بزرگ لوزی برابر ولتاژ خطی است. قطر کوچک

لوزی یعنی ضلع AB' را رسم می‌کنیم. در لوزی قطرها بر هم عمودند و یک‌دیگر را نصف می‌کنند. از طرف دیگر، قطرهای لوزی نیمساز زاویه‌های مربوطه هستند؛ بنابراین:

$$\hat{N}_1 = \hat{N}_2 = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ \qquad (7\_7)$$

$$NH = HD = \frac{V_L}{2} \qquad (7\_8)$$

مثلث ANB' یک مثلث متساوی‌الاضلاع است؛ زیرا $\hat{A} = \hat{B}' = \frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ$ و زاویه‌ی N نیز برابر 60° است، بنابراین:

$$\overline{AN} = \overline{NB'} = AB' = V_P \qquad (7\_9)$$

در مثلث قائم‌الزاویه NHB' می‌توان نوشت:

$$\cos\hat{N}_1 = \frac{\overline{NH}}{\overline{NB'}} \qquad (7\_10)$$

با منظور کردن روابط ۷ـ۷، ۸ـ۷ و ۹ـ۷ در رابطه‌ی ۱۰ـ۷ می‌توان نوشت:

$$\cos 30^\circ = \frac{\frac{V_L}{2}}{V_P}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{V_L}{2V_P}$$

$$\boxed{V_L = \sqrt{3}V_P} \qquad (7\_11)$$

نتیجه: در اتصال ستاره، بار متعادل جریان خطی با جریان فازی برابر و ولتاژ خطی $\sqrt{3}$ برابر ولتاژ فازی است.

$$\boxed{\lambda \rightarrow \begin{cases} I_P = I_L \\ V_L = \sqrt{3}V_P \end{cases}}$$

۳ـ۳ـ۷ـ محاسبه‌ی جریان نول در بار متعادل اتصال ستاره: در شکل ۸ـ۷ با استفاده از قانون کیرشهف در گره N می‌توان نوشت:

$$\vec{I}_N = \vec{I}_{MP} = \vec{I}_{P1} + \vec{I}_{P2} + \vec{I}_{P3}$$

شکل ۱۰ـ۷

جریان‌های $\vec{I}_{P1}$ ، $\vec{I}_{P2}$ و $\vec{I}_{P3}$ ،به علت متعادل بودن بار از نظر دامنه، یکسان‌اند ولی ۱۲۰درجه‌ی الکتریکی اختلاف فاز دارند. برای محاسبه‌ی $\vec{I}_N$ دیاگرام برداری جریان‌های $\vec{I}_{P1}$ ، $\vec{I}_{P2}$ و $\vec{I}_{P3}$ را مطابق شکل ۱۰ـ۷ رسم می‌کنیم. در فصل اول اثبات کردیم که برآیند سه بردار مساوی که با هم زاویه‌ی ۱۲۰ درجه می‌سازند، صفر است. پس، از سیم MP در بار متعادل، جریانی عبور نمی‌کند و می‌توان این سیم را در بار متعادل حذف کرد. در موتورهای الکتریکی به علت مساوی بودن سیم‌پیچ‌های فازها، از سیم MP در اتصال موتور به شبکه استفاده نمی‌شود ؛ زیرا در نقطه‌ی N صفر مصنوعی به وجود می‌آید.

۴ـ۳ـ۷ـ محاسبه‌ی توان اتصال ستاره‌ی با بار متعادل: توان مصرفی در هر فاز، در مقاومت اهمی و توان غیر مفید و راکتانس الفایی یا خازنی آن فاز مصرف می‌شود. به‌دلیل متعادل‌بودن بار، توان مصرفی و غیر مصرفی در هر فاز برابر است. از جمع توان مصرفی فازها، توان مصرفی کل سه‌فاز به دست می‌آید. از جمع توان‌های غیر مفید (راکتیو) فازها، توان راکتیو کل سه فاز معلوم می‌شود.

$$P_{e1} = I_{P1} V_{P1} \cos\varphi_1 = I_{P1}^2 R_1 \qquad (۷ـ۱۲)$$

$$P_{e2} = I_{P2} V_{P2} \cos\varphi_2 = I_{P2}^2 R_2 \qquad (۷ـ۱۳)$$

$$P_{e3} = I_{P3} V_{P3} \cos\varphi_3 = I_{P3}^2 R_3 \qquad (۷ـ۱۴)$$

$$P_e = P_{e1} + P_{e2} + P_{e3} = 3 V_P I_P \cos\varphi \qquad (۷ـ۱۵)$$

از روابط ۴ـ۷ و ۱۱ـ۷ مقادیر $I_L = I_P$ و $V_L = \sqrt{3} V_P$ را در رابطه‌ی ۱۵ـ۷ جایگزین می‌کنیم.

$$P_e = 3 \frac{V_L}{\sqrt{3}} \times I_L \cos\varphi$$

$$\boxed{P_e = \sqrt{3} V_L I_L \cos\varphi} \quad W \qquad (۷ـ۱۶)$$

$$P_{d1} = I_{p1} V_{p1} \sin\varphi_1 = I_{p1}^2 X_1 \qquad (۷\_۱۷)$$

$$P_{d2} = I_{p2} V_{p2} \sin\varphi_2 = I_{p2}^2 X_2 \qquad (۷\_۱۸)$$

$$P_{d3} = I_{p3} V_{p3} \sin\varphi_3 = I_{p3}^2 X_3 \qquad (۷\_۱۹)$$

$$P_d = P_{d1} + P_{d2} + P_{d3} = 3 V_p I_p \sin\varphi \qquad (۷\_۲۰)$$

در رابطه‌ی ۷ـ۲۰ $I_L = I_p$ و $V_p = \frac{V_L}{\sqrt{3}}$ را جایگزین می‌کنیم و خواهیم داشت :

$$\boxed{P_d = 3 I_L \times \frac{V_L}{\sqrt{3}} \sin\varphi = \sqrt{3} V_L I_L \sin\varphi} \qquad \text{V.A.R} \qquad (۷\_۲۱)$$

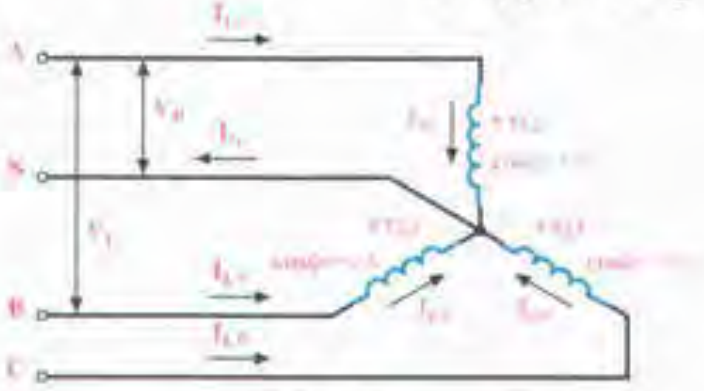
از روابط ۷ـ۱۶ و ۷ـ۲۱ می‌توان نوشت :

$$P_s = \sqrt{P_c^2 + P_d^2} = \sqrt{(\sqrt{3} V_L I_L \cos\varphi)^2 + (\sqrt{3} V_L I_L \sin\varphi)^2}$$

بدین ترتیب، توان ظاهری برابر خواهد بود با :

$$\boxed{P_s = \sqrt{3} V_L I_L} \qquad \text{V.A} \qquad (۷\_۲۲)$$

مثال ۱ـ۷: یک بار متعادل سه‌فاز با اتصال ستاره به شبکه‌ی سه‌فاز با ولتاژ ۳۸۰ ولت مطابق شکل ۷ـ۱۱ متصل است. مطلوب است :



شکل ۷ـ۱۱

الف ـ جریان هر فاز و هر خط.

از رابطه‌ی ۷ـ۱۱ داریم :

$$V_p = \frac{V_L}{\sqrt{3}} = \frac{۳۸۰}{\sqrt{3}} = ۲۲۰ \text{V}$$

بار متعادل است ؛ پس داریم :

$$I_{L1} = I_{L2} = I_{L3} = I_L$$

$$I_{p1} = I_{p2} = I_{p3} = I_p$$

از رابطه‌ی ۵ ـ ۷ می‌توان نوشت :

$$I_P = \frac{V_P}{Z} = \frac{۲۲۰}{۲۲} = ۱۰A$$

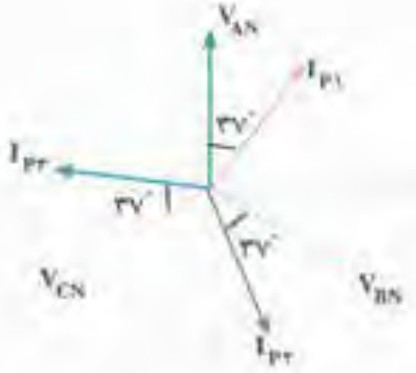
چون اتصال ستاره است :

$$I_P = I_L$$

$$I_L = ۱۰A$$

ب ـ دیاگرام برداری ولتاژها و جریان‌های فازی.

از آنجایی که ولتاژهای V_{AN} ، V_{BN} و V_{CN} با هم برابرند، اندازه‌ی بردارهای V_{AN} ، V_{BN} و V_{CN} مساوی رسم می‌شوند. از طرفی چون اختلاف فاز بین جریان هر فاز با ولتاژ مربوطه یکسان است (بار متعادل)، اندازه‌ی بردار جریان‌های فازی $I_{P۱}$ ، $I_{P۲}$ و $I_{P۳}$ نیز مساوی رسم می‌شوند (شکل ۱۲ ـ ۷).



شکل ۱۲ـ۷

$$\varphi_۱ = \varphi_۲ = \varphi_۳ = \cos^{-1}(۰/۸) = ۳۷°$$

یعنی $I_{P۱}$ نسبت به V_{AN} ، $I_{P۲}$ نسبت به V_{BN} و $I_{P۳}$ نسبت به V_{CN} به اندازه‌ی $۳۷°$ پس فاز است.

پ ـ توان‌های مصرفی.

بار متعادل است و از رابطه‌ی ۱۶ـ۷ داریم : $P_e = \sqrt{۳}V_L I_L \cos\varphi$

$$P_e = \sqrt{۳} \times ۳۸۰ \times ۱۰ \times ۰/۸ = ۵۲۸۰ \ [W]$$

از رابطه‌ی ۲۱ـ۷ داریم : $P_d = \sqrt{۳}V_L I_L \sin\varphi$

$$P_d = \sqrt{۳} \times ۳۸۰ \times ۱۰ \times ۰/۶ = +۳۹۶۰ \ [V.A.R]$$

و از رابطه‌ی ۲۲ـ۷ داریم : $P_S = \sqrt{۳}V_L I_L = \sqrt{۳} \times ۳۸۰ \times ۱۰ = ۶۶۰۰ \ [V.A]$

۵ ـ ۳ ـ ۷ ـ اتصال ستاره و بار نامتعادل: بار نامتعادل را در اتصال ستاره با فرض این‌که سیم نول دایر است، مطالعه می‌کنیم ،وجود سیم نول باعث می‌شود بارهای موجود در هر فاز از ولتاژ فازی $V_P = \frac{V_L}{\sqrt{۳}}$ تغذیه کند.

سؤال: اگر سیم نول در سیستم سه فازه‌ی اتصال ستاره قطع شود، آیا ولتاژ دو سر بارها برابر ولتاژ فازی خواهد بود؟ چرا؟

در اتصال ستاره‌ی بارهای نامتعادل، چون جریان بارها مساوی نیست ، در سیم نول جریان الکتریکی برقرار می‌شود و بردار جریان آن از جمع برداری جریان‌های فازها به دست می‌آید. برای تعیین جریان سیم نول با توجه به ولتاژهای فازی و اختلاف هر فاز، جریان‌های هر فاز را رسم می‌کنیم. برایند سه بردار جریان فازها، جریان سیم نول را معین می‌کند . برای محاسبه‌ی توان‌های اکتیو، راکتیو و ظاهری مدار سه فازه ، ابتدا توان اکتیو و راکتیو هر فاز را به دست می‌آوریم. توان اکتیو (مؤثر) مدار سه فاز از جمع توان‌های اکتیو هر سه فاز به دست می‌آید. توان راکتیو از جمع جبری توان‌های غیرمؤثر هر فاز محاسبه می‌شود.

$$P_{e1} = I_{p1} V_{p1} \cos\varphi_1 = I_{p1}^2 R_1$$

$$P_{e2} = I_{p2} V_{p2} \cos\varphi_2 = I_{p2}^2 R_2$$

$$P_{e3} = I_{p3} V_{p3} \cos\varphi_3 = I_{p3}^2 R_3$$

توان مؤثر کل سه فاز

$$P_e = P_{e1} + P_{e2} + P_{e3}$$

$$P_e = I_{p1} V_{p1} \cos\varphi_1 + I_{p2} V_{p2} \cos\varphi_2 + I_{p3} V_{p3} \cos\varphi_3 \qquad (۷\_۲۳)$$

بدین ترتیب، توان غیرمؤثر را به قرار زیر به دست می‌آوریم :

$$P_d = \pm P_{d1} \pm P_{d2} \pm P_{d3}$$

$$P_d = \pm I_{p1} V_{p1} \sin\varphi_1 \pm I_{p2} V_{p2} \sin\varphi_2 \pm I_{p3} V_{p3} \sin\varphi_3 \qquad (۷\_۲۴)$$

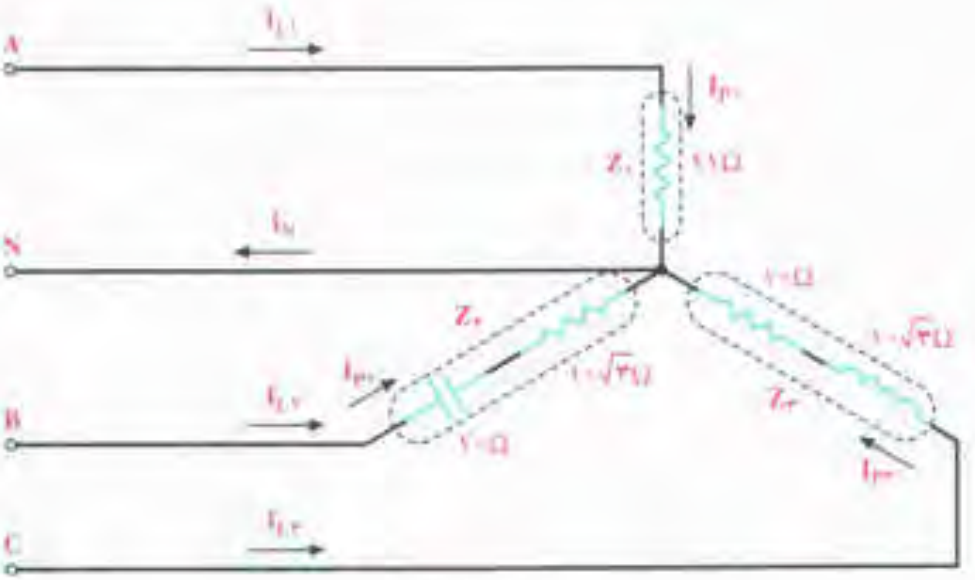
در رابطه‌ی ۲۴ـ۷، علامت منفی برای خاصیت خازنی و علامت مثبت برای خاصیت سلفی مدار هر فاز منظور می‌شود. با معلوم بودن توان مؤثر و غیرمؤثر کل مدار سه فازه، توان ظاهری مطابق رابطه‌ی ۲۵ـ۷ محاسبه می‌شود.

$$P_s = \sqrt{P_e^2 + P_d^2} \qquad (۷\_۲۵)$$

در بار نامتعادل، ضریب توان شبکه‌ی سه فاز به علت تفاوت ضرایب توان‌های هر فاز، مفهومی مثل بار متعادل نخواهد داشت، بدین علت در بار نامتعادل ضریب توان تعریف نمی‌شود .

مثال ۷ـ۲: یک بار سه‌فاز مطابق شکل ۱۳ـ۷ در اتصال به شبکه‌ی ۳۸۰ ولتی مفروض است. مطلوب است :

الف ـ امپدانس هر فاز.



شکل ۱۳ــ۷

Z_1 اهمی خالص است.

$$Z_1 = ۱۱\,[\Omega]$$

Z_2 یک مدار R-C سری است.

$$Z_2 = \sqrt{R^2 + X_C^2} = \sqrt{(۱۰\sqrt{۳})^2 + ۱۰^2} = ۲۰\,[\Omega]$$

Z_3 یک مدار R-L سری است.

$$Z_3 = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{۱۰^2 + (۱۰\sqrt{۳})^2} = ۲۰\,[\Omega]$$

ب ــ جریان هر فاز و خط.

$$V_P = \frac{V_L}{\sqrt{۳}} = \frac{۳۸۰}{\sqrt{۳}} = ۲۲۰\,[V]$$

در اتصال ستاره $I_P = I_L$ است.

$$I_{P1} = \frac{V_P}{Z_1} = \frac{۲۲۰}{۱۱} = ۲۰\,[A] \longrightarrow I_{L1} = I_{P1} = ۲۰\,[A]$$

$$I_{P2} = \frac{V_P}{Z_2} = \frac{۲۲۰}{۲۰} = ۱۱\,[A] \longrightarrow I_{L2} = I_{P2} = ۱۱\,[A]$$

$$I_{P3} = \frac{V_P}{Z_3} = \frac{۲۲۰}{۲۰} = ۱۱\,[A] \longrightarrow I_{L3} = I_{P3} = ۱۱\,[A]$$

پ ــ دیاگرام برداری ولتاژ و جریان هر سه فاز.

برای رسم دیاگرام برداری، چون مقادیر جریان‌های فازی معلوم‌اند، زاویه‌ی فاز جریان‌ها را نیز به‌دست می‌آوریم.

φ_1 اختلاف فاز بین $\vec{I}_{P1}$ و $\vec{V}_{AN}$

$$\cos\varphi_1 = \frac{R}{Z_1} = \frac{۱۱}{۱۱} = ۱ \longrightarrow \varphi_1 = \cos^{-1}(۱) = ۰$$ هم‌فاز

φ_2 اختلاف فاز بین $\vec{I}_{P2}$ و $\vec{V}_{BN}$

$$\cos\varphi_2 = \frac{R}{Z_2} = \frac{10\sqrt{3}}{20} = \frac{\sqrt{3}}{2} \longrightarrow \varphi_2 = \cos^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{2}) = (-30)^\circ$$

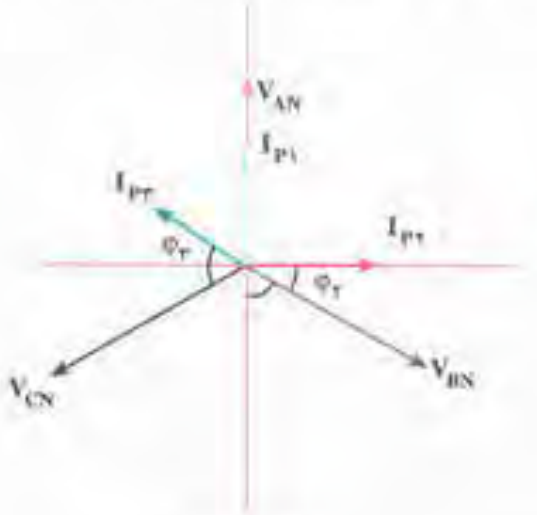
پیش‌فاز

φ_3 اختلاف فاز بین $\vec{I}_{P3}$ و $\vec{V}_{CN}$

$$\cos\varphi_3 = \frac{R}{Z_3} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2} \longrightarrow \varphi_3 = \cos^{-1}(\frac{1}{2}) = 60^\circ$$

پس فاز

ابتدا دیاگرام برداری ولتاژهای فازی V_{AN} ، V_{BN} و V_{CN} را ترسیم می‌کنیم.



شکل ۱۴ـ۷

برای تعیین موقعیت جریان‌های فازی $\vec{I}_{P1}$ ، $\vec{I}_{P2}$ و $\vec{I}_{P3}$ نسبت به $\vec{V}_{AN}$ ، $\vec{V}_{BN}$ و $\vec{V}_{CN}$ باید تشخیص دهیم که هر جریان فازی از کدام بردار ولتاژ ایجاد می‌شود. سپس با توجه به اختلاف فاز هر جریان با ولتاژ مربوطه، بردار جریان‌ها را رسم می‌کنیم.

ت ـ جریان سیم نول

برای محاسبه‌ی جریان سیم نول باید سه بردار جریان $\vec{I}_{P1}$ ، $\vec{I}_{P2}$ و $\vec{I}_{P3}$ را جمع برداری کرد. یعنی :

$$\vec{I}_N = \vec{I}_{MP} = \vec{I}_{P1} + \vec{I}_{P2} + \vec{I}_{P3}$$

در فصل دوم، بخش جمع بردارها آموختیم که برای سه بردار باید مؤلفه‌های آن‌ها را در جهت محور xها وyها به‌دست آوریم و سپس آن مؤلفه‌ها را جمع کنیم.

همان‌طور که در شکل ۱۴ـ۷ مشاهده می‌کنیم $\vec{I}_{P1}$ دقیقاً بر روی محورyها واقع شده است :

یعنی، مؤلفه روی محور x ندارد.

$$\begin{cases} I_{P1x} = 0 \\ I_{P1y} = I_{P1} = 20A \end{cases}$$

هم‌چنین بردار جریان I_{P2} نیز با توجه به زاویه‌ی φ_2 روی محور xها واقع شده است؛ یعنی، مؤلفه‌ای روی محور yها ندارد.

$$\begin{cases} I_{P2x} = I_{P2} = 11A \\ I_{P2y} = 0 \end{cases}$$

بردار جریان I_{P3} را باید ابتدا به دو مؤلفه تجزیه کرد. با انجام دادن این کار، شکل ۱۴ـ۷ ـالف را خواهیم داشت.

شکل ۱۴ـ۷ـ الف

I_{P3x} در قسمت منفی محور xها می‌باشد و علامت آن منفی است.

$$\begin{cases} I_{P3x} = I_{P3}.\cos 30^\circ = 11 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -5/5\sqrt{3} \end{cases}$$

I_{P3y} در قسمت مثبت محور yها واقع است و علامت آن مثبت می‌باشد.

$$\begin{cases} I_{P3y} = I_{P3} \sin 30^\circ = 11 \times \frac{1}{2} = +5/5 \end{cases}$$

$$\Sigma I_x = I_{P1x} + I_{P2x} + I_{P3x} = 0 + 11 - 5/5\sqrt{3} = 1/47\,[A]$$

$$\Sigma I_x = I_{P1y} + I_{P2y} + I_{P3y} = 20 + 0 + 5/5 = 25/5\,[A]$$

$$\vec{I}_N = \vec{I}_{MP} = \vec{I}_{P1} + \vec{I}_{P2} + \vec{I}_{P3} = \sqrt{\Sigma I_{x^2} + \Sigma I_{y^2}} = \sqrt{1/47^2 + 25/5^2} = 25/54\,[A]$$

ث ـ توان مصرفی، راکتیو و ظاهری کل شبکه.

$$P_{c1} = V_P.I_{P1}\cos\varphi_1 = 220 \times 20 \times 1 = 4400\,[W]$$

$$P_{c۳} = V_P . I_{P۳} \cos\varphi_۳ = ۲۲۰ \times ۱۱ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۲۰۹۰ [W]$$

$$P_{c۳} = V_P . I_{P۳} \cos\varphi_۳ = ۲۲۰ \times ۱۱ \times \frac{۱}{۲} = ۱۲۱۰ [W]$$

$$P_c = P_{c۱} + P_{c۲} + P_{c۳} = ۴۴۰۰ + ۲۰۹۰ + ۱۲۱۰ = ۷۷۰۰ [W]$$

$$P_{d۱} = V_P . I_{P۱} \sin\varphi_۱ = ۲۲۰ \times ۲۰ \times ۰ = ۰$$

$$P_{d۲} = V_P . I_{P۲} \sin\varphi_۲ = ۲۲۰ \times ۱۱ \times (-\frac{۱}{۲}) = -۱۲۱۰ [V.A.R]$$

$$P_{d۳} = V_P . I_{P۳} \sin\varphi_۳ = ۲۲۰ \times ۱۱ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۲۰۹۰ [V.A.R]$$

$$P_d = \pm P_{d۱} \pm P_{d۲} \pm P_{d۳} = ۰ - ۱۲۱۰ + ۲۰۹۰ = ۸۸۰ [V.A.R]$$

$$P_s = \sqrt{P_c^۲ + P_d^۲} = \sqrt{۷۷۰۰^۲ + ۸۸۰^۲} = ۷۷۵۰ [V.A]$$

۴ــ۷ــ اتصال مثلث

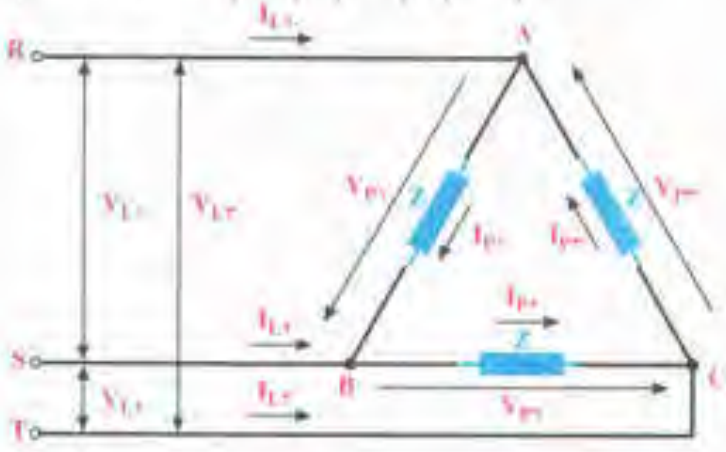
اتصال مثلث سه فاز را زمانی که بار متعادل است، بررسی می‌کنیم.

۱ــ۴ــ۷ــ محاسبه‌ی جریان و ولتاژ خطی در اتصال مثلث با بار متعادل: سه بار متعادل به امپدانس Z و زاویه‌ی فاز هر کدام φ مطابق شکل ۱۵ــ۷ با اتصال مثلث در نظر می‌گیریم. ولتاژهای فازی $V_{P۱}$، $V_{P۲}$ و $V_{P۳}$ با ولتاژهای خطی $V_{L۱}$، $V_{L۲}$ و $V_{L۳}$ یکی هستند. بنابراین، در اتصال مثلث، ولتاژ بین خطوط با ولتاژ دو سر مصرف‌کننده‌ها در هر فاز یکی است. پس:

$$V_L = V_P \qquad (۷ــ۲۶)$$

چون بار متعادل است، پس، جریان‌های فازی با هم برابرند.

$$\left|\vec{I}_{P۱}\right| = \left|\vec{I}_{P۲}\right| = \left|\vec{I}_{P۳}\right| = I_P \quad \text{و} \quad \left|\vec{I}_{L۱}\right| = \left|\vec{I}_{L۲}\right| = \left|\vec{I}_{L۳}\right| = \vec{I}_L$$



شکل ۱۵ــ۷

در گره‌های A، B و C شکل ۱۵ـ۷ با استفاده از قانون جریان‌های کیرشهف می‌توان نوشت :

$$\vec{I}_{L1} = \vec{I}_{P1} - \vec{I}_{P3} \qquad (۷\_۲۷)$$

$$\vec{I}_{L2} = \vec{I}_{P2} - \vec{I}_{P1} \qquad (۷\_۲۸)$$

$$\vec{I}_{L3} = \vec{I}_{P3} - \vec{I}_{P2} \qquad (۷\_۲۹)$$

چون $I_L = |\vec{I}_{L1}| = |\vec{I}_{L2}| = |\vec{I}_{L3}|$ است، با استفاده از رابطه‌ی ۲۸ـ۷ می‌توان مقدار I_L را به دست آورد. از نقطه‌ای مانند O، هم‌سنگ بردارهای $\vec{I}_{P1}$ ، $\vec{I}_{P2}$ و $\vec{I}_{P3}$ را مطابق شکل ۱۶ـ۷ رسم می‌کنیم. برای محاسبه‌ی $\vec{I}_{L1}$ لازم است جریان I_{P3} را به اندازه‌ی خود در خلاف جهتش امتداد دهیم تا بردار $\vec{OD}$ که $-I_{P3}$ است، به دست آید. برایند دو بردار $\vec{OD}$ و $\vec{I}_{P1} = \vec{OC}$ بردار جریان خطی I_{L1} را معلوم می‌کند. چهار ضلعی OCED یک لوزی است. بنابراین، قطرهای آن بر هم عمودند و علاوه بر آن‌که یک‌دیگر را در نقطه‌ی H نصف می‌کنند، نیمساز زاویه‌های لوزی هم هستند. چون زاویه‌ی $C\hat{O}D$ ، ۶۰ درجه است ، زاویه‌ی $C\hat{O}H$ برابر ۳۰ درجه خواهد بود. در مثلث OHC می‌توان نوشت :

$$OH = \frac{OE}{2} = \frac{I_L}{2} \quad و \quad CO = I_{P1} = I_P$$

$$CH = \frac{CD}{2} = \frac{I_P}{2}$$

$$\cos C\hat{O}H = \frac{\overline{OH}}{\overline{CO}}$$

$$\cos 30 = \frac{\frac{I_L}{2}}{I_P} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{I_L}{2I_P}$$

شکل ۱۶ـ۷

$$\boxed{I_L = \sqrt{3} I_P} \qquad (۷\_۳۰)$$

از روابط ۲۶ـ۷ و ۳۰ـ۷ می‌توان نتیجه گرفت :

در اتصال مثلث در بار متعادل، جریان خطی، $\sqrt{3}$ برابر جریان فازی و ولتاژ خطی برابر ولتاژ فازی است .

۲ـ۴ـ۷ـ محاسبه‌ی توان‌ها در اتصال مثلث با بار متعادل: در بار متعادل، توان مؤثر و غیرمؤثر تمام فازها با هم برابرند . به طوری که توان مؤثر کل را می‌توان سه برابر توان مؤثر هر فاز در نظر گرفت. هم‌چنین توان غیرمؤثر کل، سه برابر توان غیرمؤثر هر فاز است.

$$P_{e1} = P_{e2} = P_{e3} \Rightarrow P_e = P_{e1} + P_{e2} + P_{e3}$$

$$P_{e1} = I_{p1}^2 R_1 = I_P^2 R = V_P I_P \cos\varphi$$

$$P_{d1} = I_{p1}^2 X = I_P^2 X = V_P I_P \sin\varphi$$

$$P_e = 3Pw_1 = 3I_P^2 R = 3V_P I_P \cos\varphi \qquad (۷\_۳۱)$$

$$P_d = 3P_{d1} = 3I_P^2 X = 3V_P I_P \sin\varphi \qquad (۷\_۳۲)$$

اگر مقادیر محاسبه شده در روابط ۲۶ـ۷ و ۳۰ـ۷ را در روابط ۳۱ـ۷ و ۳۲ـ۷ منظور کنیم، خواهیم داشت :

$$\Delta \begin{cases} V_L = V_P \\ I_L = \sqrt{3} I_P \Rightarrow I_P = \dfrac{I_L}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$P_e = 3V_P \ I_P \cos\varphi$$

$$P_e = 3V_L \times \frac{I_L}{\sqrt{3}} \cos\varphi$$

$$\boxed{P_e = \sqrt{3} V_L I_L \cos\varphi} \ [W] \qquad (۷\_۳۳)$$

$$P_d = 3I_P V_P \sin\varphi$$

$$P_d = 3 \times \frac{I_L}{\sqrt{3}} \times V_L \sin\varphi$$

$$\boxed{P_q = \sqrt{3} I_L V_L \sin\varphi} \quad [V.A.R] \qquad (۷\_۳۴)$$

$$\boxed{P_S = \sqrt{P_W^2 + P_q^2} = \sqrt{3} V_L I_L} \quad [V.A] \qquad (۷\_۳۵)$$

با مقایسه‌ی روابط ۷ـ۱۶ ، ۷ـ۲۱، ۷ـ۲۲، ۷ـ۳۳، ۷ـ۳۴ و ۷ـ۳۵ مشاهده می‌شود که ظاهراً در اتصال مثلث و اتصال ستاره توان‌ها یکی هستند. در صورتی که اگر در بار یکسان فازها ، یک‌بار اتصال بارها ستاره و یک‌بار با اتصال مثلث به یک شبکه‌ی معین اتصال داده شود، توان در اتصال مثلث ۳ برابر توان در اتصال ستاره خواهد بود.

اتصال ستاره λ ⇒

$$\begin{cases} I_P = \dfrac{V_P}{Z} = I_L \\ V_P = \dfrac{V_L}{\sqrt{3}} \Rightarrow P_{w\lambda} = \sqrt{3} V_L \times I_L \cos\varphi = \sqrt{3} I_P \times \sqrt{3} V_P \times \dfrac{R}{Z} \\ \cos\varphi = \dfrac{R}{Z} \\ P_{c\lambda} = 3 \dfrac{V_P^2 R}{Z^2} \end{cases} \qquad (۷\_۳۶)$$

اتصال مثلث Δ ⇒

$$\begin{cases} I_L = \sqrt{3} I_P = \sqrt{3} \dfrac{V_L}{Z} \\ V_L = V_P \Rightarrow P_{c\Delta} = \sqrt{3} V_L I_L \cos\varphi = \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \dfrac{V_L}{Z} \times V_L \times \dfrac{R}{Z} \\ \cos\varphi = \dfrac{R}{Z} \\ P_{c\Delta} = \dfrac{3 V_L^2 R}{Z^2} \end{cases} \qquad (۷\_۳۷)$$

از تقسیم رابطه‌ی ۳۷ـ۷ به رابطه‌ی ۳۶ـ۷ می‌توان نوشت :

$$\frac{P_{c\Delta}}{P_{cY}} = \frac{\frac{3V_L^2 R}{Z^2}}{\frac{3V_P^2 \times R}{Z^2}} = \frac{V_L^2}{V_P^2} = \frac{(\sqrt{3}V_P)^2}{V_P^2} = 3$$

$$\boxed{P_{c\Delta} = 3P_{cY}} \qquad (۷\_۳۸)$$

نتیجه: اگر یک موتور سه فاز را به صورت ستاره و مثلث به شبکه وصل کنیم و موتور در حالت مثلث با توان نامی کار کند، در حالت ستاره $\frac{1}{3}$ توان نامی را خواهد داشت و از شبکه $\frac{1}{3}$ جریان نامی را دریافت می‌کند. این عمل موتورها در اتصال ستاره و مثلث، زمینه‌ی مساعدی برای راه‌اندازی موتورهای سه فاز آسنکرون است.

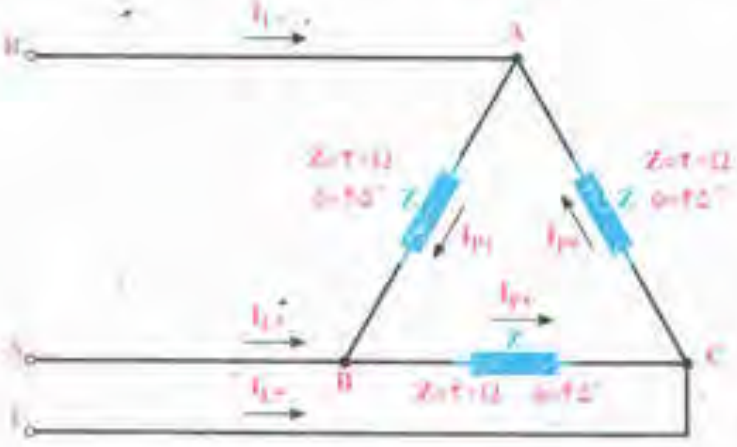
مثال ۳ـ۷: سه امپدانس (مطابق شکل ۱۷ـ۷) به شبکه‌ی سه سیمه با ولتاژ خطی ۱۰۰ ولت به‌صورت مثلث اتصال دارند. مطلوب است :

۱ـ جریان فازی و خطی.

۲ـ دیاگرام برداری ولتاژهای خطی و جریان‌های فازی و خطی.

۳ـ توان مصرفی، غیر مفید و ظاهری.

۴ـ اگر سه امپدانس به صورت ستاره وصل شوند، چه توانی مصرف می‌کنند؟ اندازه‌ی این توان چه نسبتی از حالت مثلث است؟



شکل ۱۷ـ۷

راه حل:

۱ـ می‌توان نوشت :

$$V_{BC} = ۱۰۰V, \varphi_{BC} = ۰^\circ \quad V_{AB} = ۱۰۰V, \varphi_{AB} = ۱۲۰^\circ$$

$$V_{CA} = ۱۰۰V, \varphi_{CA} = -۱۲۰^\circ$$

$\Delta\{V_P = V_L = ۱۰۰$، بار متعادل، $|I_{P۱}| = |I_{P۲}| = |I_{P۳}|$ و

$|I_{L۱}| = |I_{L۲}| = |I_{L۳}| = I_L$

$I_{P۱} = \frac{V_{P۱}}{Z_۱} = \frac{۱۰۰}{۲۰} = ۵A, \varphi_۱ = ۴۵$ V_{AB} از ولتاژ پس فاز

جریان $I_{P۱}$ از $\vec{V}_{AB}$ ، ۴۵° پس فاز است. با توجه به اینکه $\vec{V}_{AB}$ از $\vec{V}_{BC}$ ، ۱۲۰ درجه جلوتر است، زاویه‌ی جریان $I_{P۱}$ از ولتاژ مبنا $\vec{V}_{BC}$ برابر $۱۲۰ - ۴۵ = ۷۵^\circ$ خواهد شد.

زاویه‌ی جریان‌های $\vec{I}_{P۲}$ و $\vec{I}_{P۳}$ از ولتاژ مبنا به ترتیب -۴۵° و -۱۶۵° خواهد شد. بنابراین :

$|I_{P۱}| = |I_{P۲}| = |I_{P۳}| = I_P = ۵[A]$

برای به دست آوردن جریان خطی می‌توان از رابطه‌ی ۳۰ـ۷ استفاده کرد.

$|I_{L۱}| = |I_{L۲}| = |I_{L۳}| = I_L = \sqrt{۳} I_P = \sqrt{۳} \times ۵ = ۸/۶۶[A]$

۲ـ دیاگرام برداری جریان‌ها را مطابق شکل ۱۸ـ۷ رسم می‌کنیم.

$\vec{I}_{L۱} = \vec{I}_{P۱} - \vec{I}_{P۳}$

$\vec{I}_{L۲} = \vec{I}_{P۲} - \vec{I}_{P۱}$

$\vec{I}_{L۳} = \vec{I}_{P۳} - \vec{I}_{P۲}$

شکل ۱۸ـ۷ـ دیاگرام برداری جریان‌ها و ولتاژها

۳ـ $V_L = ۱۰۰$ ، $\varphi = ۴۵^\circ$ ، $I_L = ۵\sqrt{۳}$

$P_e = \sqrt{۳} V_L I_L \cos\varphi$

$$P_e = \sqrt{3} \times 100 \times 5\sqrt{3} \cos 45^\circ$$

$$P_e = \sqrt{3} \times 100 \times 5\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 1060/6 [W]$$

$$P_d = \sqrt{3} V_L I_L \sin\varphi = \sqrt{3} \times 100 \times 5\sqrt{2} \times \sin 45^\circ$$

$$P_d = 1060/6 \ [V.A.R]$$

$$P_S = \sqrt{P_e^2 + P_d^2} = \sqrt{3} V_L I_L = \sqrt{3} \times 100 \times 5\sqrt{3} = 1500 [V.A]$$

۴ـ

$$P_{c\lambda} = \sqrt{3} I_L V_L \cos\varphi$$

$$V_P = \frac{V_L}{\sqrt{3}} = \frac{100}{\sqrt{3}} [V]$$

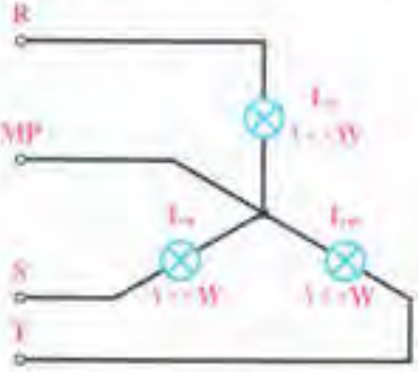
$$I_L = I_P = \frac{V_P}{Z} = \frac{100/\sqrt{3}}{20} = \frac{5}{\sqrt{3}} [A]$$

$$P_{c\lambda} = \sqrt{3} \times \frac{5}{\sqrt{3}} \times 100 \times \cos 45^\circ = 353/55 [W]$$

$$P_{c\lambda} / P_{c\Delta} = \frac{353/55}{1060/6} = \frac{1}{3}$$

۵ـ۷ـ اثر قطع یک‌فاز از خطوط انتقال بر مصرف کننده‌ها

۱ـ۵ـ۷ـ اتصال ستاره: فرض می‌کنیم سه لامپ ۱۰۰واتی (مطابق شکل۱۹ـ۷) به یک شبکه‌ی سه فازه‌ی چهار سیمه با اتصال ستاره وصل باشند. اگر فاز R قطع شود یا مصرف کننده‌ی L_1 از مدار خارج گردد، در صورتی که سیم نول وصل شده باشد، دو مصرف کننده‌ی دیگر ـ یعنی لامپ‌های L_2, L_3 ـ با توان نامی به کار خود ادامه می‌دهند. در نتیجه، توان سیستم سه فاز $P_{L_2} + P_{L_3} = 200W$ خواهد بود؛ یعنی، مدار سه فازه با $\frac{2}{3}$ قدرت نامی به کار خود ادامه می‌دهد.



شکل ۱۹ـ۷

اگر سیم نول و فاز R قطع شود، دو بار L_2 ، L_1 با هم سری می‌شوند و تحت ولتاژ خطی V_{ST} قرار می‌گیرند. چنان‌چه اثر حرارت را در مقاومت‌های مصرف کننده‌ها نادیده بگیریم، می‌توانیم بگوییم مقاومت در این وضعیت دو برابر شده است ولی ولتاژ $\frac{V_L}{V_P}=\sqrt{3}$ برابر می‌شود. بنابراین، تغییر ولتاژ از تغییر مقاومت‌ها در مدار V_{ST} کم‌تر است. در نتیجه، جریان کاهش می‌یابد و به دنبال آن، نور و توان لامپ کم‌تر می‌شود. در این حالت، توان مدار برابر است با:

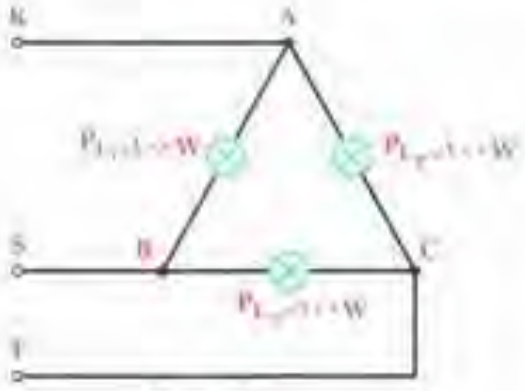
$$P_e=\frac{V_L^2}{2R}=\frac{3V_P^2}{2R}=\frac{3}{2}\times\frac{V_P^2}{R}$$

$$P_{L1}=P_{L2}=P_{L3}=\frac{V_P^2}{R}=100\,[W]$$

$$P_e=\frac{3}{2}\times100=150\,[W]$$

توان مدار به نصف کاهش می‌یابد. در موتورهای سه فاز وقتی یک‌فاز قطع می‌شود، موتور دو فاز کار می‌کند و توان آن به نصف توان نامی می‌رسد. علاوه بر کاهش توان، حوزه‌ی دوار در سطح استاتور از شکل سه فاز خارج می‌شود. در صورتی که موتور زیر بار باشد، امکان غلبه‌ی بار بر قدرت موتور زیاد است. در نتیجه، موتور زیر بار می‌خوابد. اگر سیستم حفاظتی موتور عمل نکند، سوختن موتور حتمی است.

۲ــ۵ــ۷ــ اتصال مثلث: فرض می‌کنیم سه لامپ ۱۰۰ واتی به شبکه‌ی سه فازه‌ی سه‌سیمه (مطابق شکل ۲ــ۷) با اتصال مثلث به هم وصل باشند. اگر سه فاز سالم باشد و فقط یکی از مصرف‌کننده‌ها ــ مثلاً L_1 ــ از شبکه خارج شود، دو لامپ باقی‌مانده ــ یعنی L_2 و L_3 ــ با توان نامی به کار خود ادامه خواهند داد و در کیفیت نور آن‌ها تغییری به وجود نمی‌آید و مدار سه فاز با $\frac{2}{3}$ توان نامی کار خواهد کرد. اگر مصرف کننده‌ها سالم باشند و فقط یکی از فازها ــ مثلاً R ــ قطع



شکل ۲ــ۷

شود، لامپ $L_۳$ چون ولتاژ نامی را از دو فاز S و T دریافت می‌کند، با نور طبیعی و توان نامی خود به کار ادامه می‌دهد. دو لامپ $L_۲$ و $L_۴$ سری شده و از ولتاژ خطی بین S و T تغذیه می‌کنند. درنتیجه، این دو مصرف کننده به اندازه‌ی نصف ولتاژ نامی از شبکه تغذیه می‌شوند. اگر از اثرات حرارتی در مصرف کننده‌های $L_۳$ و $L_۱$ صرف‌نظر کنیم، خواهیم داشت:

$$P_c = \frac{V_L^۲}{۲R} + P_{L۲} \qquad (۷\_۳۹)$$

$$P_{L۱} = P_{L۲} = P_{L۴} = \frac{V_L^۲}{R} = ۱۰۰$$

$$P = ۵۰ + ۱۰۰ = ۱۵۰ [W]$$

توان مدار سه فازه برابر نصف توان نامی قبل از قطع یک فاز می‌شود. اگر مصرف کننده‌های $L_۱$، $L_۲$ و $L_۳$ سیم‌پیچ‌های یک الکتروموتور باشند، به هنگام بارداری مورد تهدید قرار می‌گیرند و احتمال از بین رفتن و سوختن سیم‌پیچ‌ها زیاد است.

۶ــ۷ــ اثر تعویض دو فاز بر کمیت‌های الکتریکی مصرف کننده‌ها

تعویض دو فاز در شبکه‌های سه فازه، وقتی مصرف کننده‌ها متعادل‌اند، هیچ اثر نامطلوبی در مقادیر جریان‌های فازی، خطی، توان‌های مفید، غیرمفید و ضریب توان ندارد. فقط در موتورها یا مصرف‌کننده‌هایی که گردش مکانیکی دارند، جهت گردش عوض می‌شود. در بارهای نامتعادل، تعویض جای دو فاز در کمیت‌های الکتریکی آثاری برجای می‌گذارد و سبب تغییر جریان فازها می‌شود. بنابراین، باید به این نکته توجه داشت و از جابه‌جایی ناخواسته در فازها خودداری کرد.

۷ــ۷ــ اثر قطع سیم نول در بار نامتعادل سه فاز اتصال ستاره

در اتصال ستاره‌ی بارهای نامتعادل، وجود سیم نول موجب برقراری ولتاژ فازی $V_P = \frac{V_L}{\sqrt{۳}}$ در هر فاز می‌شود. در صورت قطع سیم نول، ولتاژهای سربارها در هر فاز برابر $\frac{V_L}{\sqrt{۳}}$ نخواهد شد. به بعضی از فازها، ولتاژ کم‌تر و به بعضی دیگر ولتاژ بیش‌تری اعمال می‌شود. این پدیده مصرف کننده‌های نامتعادل را تهدید می‌کند. در حالت یاد شده، مرکز بارها از پتانسیل صفر خارج می‌شود و به عبارت دیگر، نسبت به زمین اختلاف پتانسیل پیدا می‌کند. این تغییر پتانسیل مرکز بارها را **تغییر مکان نقطه‌ی صفر** می‌گویند.

۸ـ۷ـ تمرین‌ها

۱ـ سه بار مساوی به امپدانسهای $Z = 44\Omega$، $\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$ پس فاز با اتصال ستاره، به شبکه‌ی چهار سیمه وصل هستند. ولتاژ خطی $V_L = 380$ ولت است. مطلوب است :

۱ـ جریان هر خط و هر فاز.

۲ـ جریان سیم نول.

۳ـ توان مصرفی و غیرمفید و ظاهری.

۴ـ رسم دیاگرام جریان‌ها و ولتاژهای فازی و خطی.

جواب : ۱) $I_L = I_P = 5A$ ۲) $I_N = 0$

۳) $P_e = 2850W, P_q = 1650\ V.A.R$

$P_S = 3300V.A$

۲ـ بار سه فازی با مقاومت اهمی هر فاز $R = 8\Omega$ و ضریب اندوکتانس هر فاز $L = 20mH$ مفروض است. این الکتروموتور در اتصال ستاره و مثلث در شبکه به فاز با فرکانس $50Hz$ و ولتاژ خطی $V_L = 380$ ولت چه توانی از شبکه دریافت می‌کند $(\pi = 3)$؟

جواب : $P_\Delta = 1.34/6W, P_\lambda = 11/6kW$

۳ـ شبکه‌ی سه فاز با ولتاژ $V_{BC} = 380V$ مفروض است. سه بار $Z_A = 20\Omega$ با $\varphi = 0$ و $Z_B = 44\Omega$ با $\varphi = -60°$ و $Z_C = 22\Omega$ با $\varphi = +30°$ با اتصال ستاره‌ی چهار سیمه به شبکه وصل هستند. جریان سیم نول چند آمپر است؟

۴ـ شبکه‌ی سه فاز چهار سیمه با $V_{BC} = 380$ ولت مفروض‌است. این شبکه سه بار نامتعادل $Z_A = 44\Omega$ را با $\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$ پس فاز و $Z_B = 10\Omega$ با $\varphi = -30°$ و $Z_C = 5\Omega$ با $\cos\varphi = 1$ را با اتصال ستاره تغذیه می‌کند. مطلوب است :

۱ـ جریان هر فاز.

۲ـ توان مصرفی و راکتیو و ظاهری شبکه‌ی سه فاز.

۳ـ دیاگرام برداری ولتاژهای خطی و فازی و جریان‌ها.

۴ـ محاسبه‌ی توان مصرفی در صورتی که فاز A قطع شود.

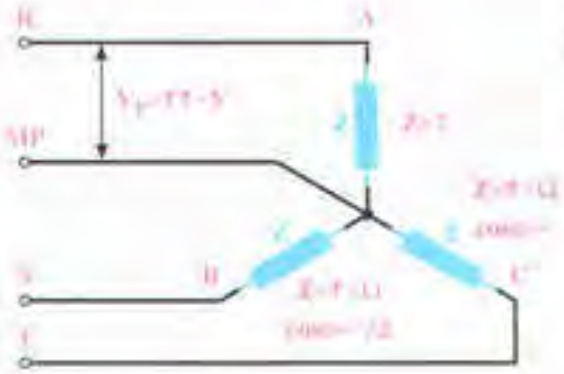
جواب : ۱) $I_A = 5A$ ، $I_B = 22A$ ، $I_C = 44A$

۲) $P_e = 14635W$ $P_q = -1644\ V.A.R$ $P_s = 14727\ V.A.R$

۴) $P_e = 13860W$

۵ــ در مدار الکتریکی شکل ۲۱ــ۷ اگر جریان سیم نول صفر باشد، امپدانس Z چند اهم است؟

جواب : $Z = \infty$

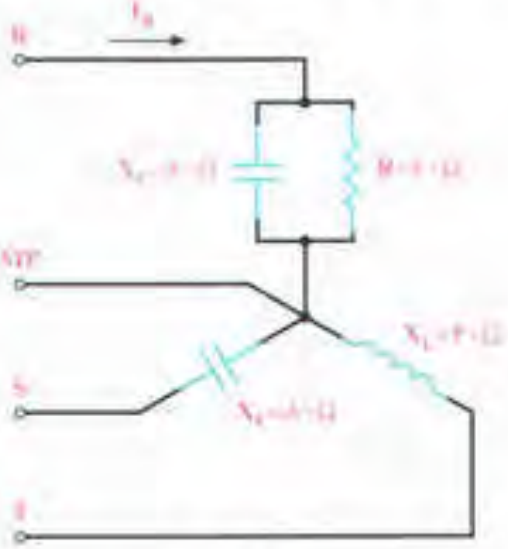


شکل ۲۱ ــ۷

۶ــ در مدار الکتریکی شکل ۲۲ــ۷ توان مصرفی شبکه ۹۶۰ وات است. مطلوب است :

الف. جریان I_R .

ب. توان ظاهری کلّ مدار درصورتی که $Up = ۲۴۰$ ولت باشد.



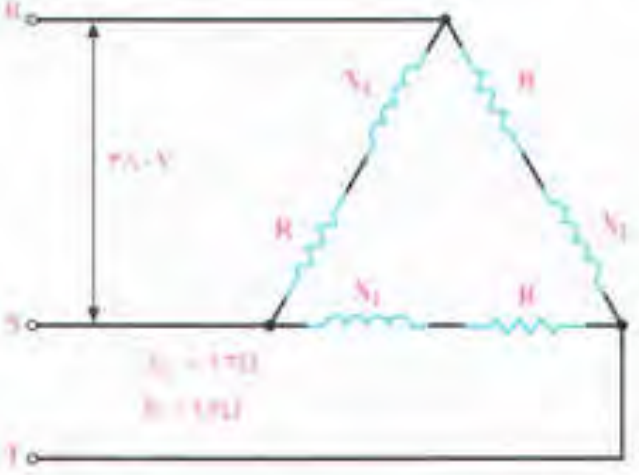
شکل ۲۲ ــ۷

۷ــ در شکل ۲۳ــ۷ یک مصرف کننده‌ی سه فاز متعادل از شبکه‌ی سه فازی تغذیه می‌کند. مطلوب است :

الف ــ جریان هر فاز و هر خط.

ب ــ توان مصرفی.

پ ــ رسم دیاگرام برداری جریان‌ها و ولتاژها.



شکل ۲۳ ــ۷ــ توالی فاز ABC

۸ ــ در مدار الکتریکی سه فازه‌ی شکل۲۴ــ۷ سه امپدانس Z با ضریب قدرت ۰/۸ پس‌فاز به‌صورت مثلث اتصال دارند. مطلوب است محاسبه‌ی :

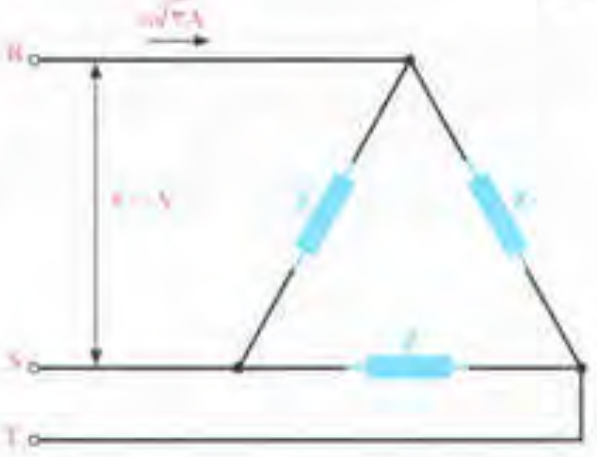
الف ــ مقدار امپدانس Z.

ب ــ توان‌های مصرفی، راکتیو و ظاهری.

جواب :

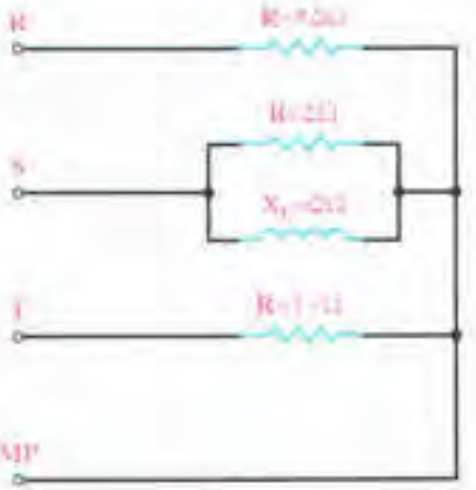
الف ــ ۵۰Ω

ب ــ ۷۶۷۰W ، ۵۷۶۰V.A.R و ۹۶۰۰



شکل ۲۴ ــ۷

۹ــ در مدار الکتریکی شکل۲۵ــ۷ اگر توان راکتیو بار $P_q = ۱۲۵V.A.R$ باشد، جریان سیم نول چند آمپر است؟



شکل ۲۵ ــ۷

ضمیمه‌ی ۲ واژه‌های انگلیسی معمول در مدارهای جریان متناوب

Circuit	مدار
Network	شبکه
Current	جریان
Voltage	ولتاژ
Resistance	خاصیت مقاومتی
Inductance	اندوکتانس(ضریب القایی)
Capacitance	کاپاسیتانس(ظرفیت خازنی)
Dc Resistive Circuits	مدارهای اهمی جریان مستقیم
Voltage Division	تقسیم ولتاژ
Current Division	تقسیم جریان
Three _ Phase System	سیستم سه فازه
Kirchhoff's Law	قوانین کیرشهف
Series Circuits	مدارهای سری
Parallel Circuits	مدارهای موازی
Sinusoidal Circuits	مدارهای جریان متناوب
Impedance	امپدانس ـ مقاومت ظاهری
Admittance	ادمیتانس (هدایت ظاهری)
Frequency	فرکانس
Δ _ Connection	اتصال مثلث

λ - Connection	اتصال ستاره
Power Factor	ضریب توان
Time Constant	ثابت زمانی
Four - Wire y - Connected	چهار سیمه‌ی اتصال y
Power Factor	ضریب توان
Balanced Loads	بارهای متعادل
Unbalanced Loads	بارهای نامتعادل
Complex Numbers	اعداد مختلط
Real Numbers	اعداد حقیقی
Complex Numbers	اعداد موهومی
Average Power	توان متوسط
Apparent Power	توان ظاهری
Reactive Power	توان غیرحقیقی(غیرمؤثر)
Active Power	توان حقیقی
Diagrams	دیاگرام
Quality Factor	ضریب کیفیت
Matrix	ماتریس
Self Inductance	خود القایی
Sequnence	توالی ـ ترتیب

منابع و مآخذ

1) ELECTRIC CIRCUITS ZIED JOSEPH A EDMINISTER SCHAUMS OUTLINE SERIES

COPYRIGHT 1983 BY MCGRAW - HILLBOOK CO .

2) ENGINEERING CIRCUIT ANALYSIS FOURTH EDITION WILLIAM . H . HAYT,JR . JACKE . KEMMERLY 1986 MCGRAW - HILLBOOK . CO .

۳ـ جی بوزـ ن. استیونس؛ مبادی علم شبکه‌ها، ترجمه‌ی نحوی ـ مهدی احسان، چاپ دوم، ۱۳۶۳.

۴ـ چارلز دسور ـ ارنست کوه؛ نظریه‌ی اساسی مدارها و شبکه‌ها(قسمت اول)، ترجمه‌ی پرویز جبه دارمارلانی، چاپ پنجم، ۱۳۶۶.

۵ـ فلوید، توماس. ال؛ اصول و مبانی مدارهای الکتریکی، ترجمه‌ی دکتر مهرداد عابدی، ۱۳۶۷.

شابک X-۰۸۹۰-۰۵-۰۰-۹۶۴
ISBN 964-05-0890-X

قیمت در تمام کشور ۳۰۰۰ ریال

۱۳۸۴