جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

ریاضی ۳

(پودمانی)

فنی و حرفه‌ای (کلیه‌ی رشته‌های زمینه‌ی صنعت و
رشته‌ی کامپیوتر زمینه‌ی خدمات)

نظام جدید آموزش متوسطه

۴۸۲/۸

بسم الله الرحمن الرحیم

ریاضی (۳)

(پودمانی)

کلیه‌ی رشته‌های زمینه‌ی صنعت
و
رشته‌ی کامپیوتر زمینه‌ی خدمات

شاخه‌ی آموزش فنی و حرفه‌ای

شماره‌ی درس ۱۵۱۵

۵۱۰ بابلیان، اسماعیل

ر ۱۲۵ ب/ ریاضی (۳) (پودمانی) / مؤلفان : اسماعیل بابلیان، محمدهاشم رستمی، جواد لالی.

۱۳۸۴ ــ تهران : شرکت صنایع آموزشی وابسته به وزارت آموزش و پرورش، ۱۳۸۴.

۱۷۶ص. ــ (آموزش فنی و حرفه‌ای ؛ شماره‌ی درس ۱۵۱۵)

متون درسی کلیه‌ی رشته‌های زمینه‌ی صنعت و رشته‌ی کامپیوتر زمینه‌ی خدمات.

برنامه‌ریزی محتوا و نظارت بر تألیف : دفتر برنامه‌ریزی و تألیف آموزش‌های فنی و حرفه‌ای و کاردانش وزارت آموزش و پرورش.

۱. ریاضیات. الف. رستمی، محمدهاشم. ب. لالی، جواد. ج. ایران. وزارت آموزش و پرورش. دفتر برنامه‌ریزی و تألیف آموزش‌های فنی و حرفه‌ای و کاردانش. د. عنوان. هـ. فروست.

۱۳۸۴

همکاران محترم و دانش‌آموزان عزیز:

پیشنهادات و نظرات خود را درباره‌ی محتوای این کتاب بـه نشانی تهران ـ صندوق پستی شماره‌ی ۴۸۷۴/۱۵دفتر برنامه‌ریزی و تألیف آموزش‌های فنی و حرفه‌ای و کاردانش، ارسال فرمایند.

پست الکترونیکی info@tvoccd.sch.ir

آدرس الکترونیکی www.tvoccd.sch.ir

این کتاب با توجه به برنامه‌ی سالی ـ واحدی و با روش «پودمانی» توسط کمیسیون تخصصی رشته‌ی ریاضی دفتر برنامه‌ریزی و تألیف آموزش‌های فنی و حرفه‌ای و کاردانش بررسی و تأیید شده است.

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

برنامه‌ریزی محتوا و نظارت بر تألیف : دفتر برنامه‌ریزی و تألیف آموزش‌های فنی و حرفه‌ای و کاردانش

نام کتاب : ریاضی (۳) (پودمانی) ـ ۴۸۲/۸

مؤلفان : دکتر اسماعیل بابلیان، محمدهاشم رستمی و دکتر جواد لالی

ویراستاران فنی : سید احمد سادات حسینی ، سید مرتضی رضوی

آماده‌سازی و نظارت بر چاپ : اداره‌ی کلّ چاپ و توزیع کتاب‌های درسی

رسام : فتح‌اله نظریان

صفحه‌آرا : فائزه محسن‌شیرازی

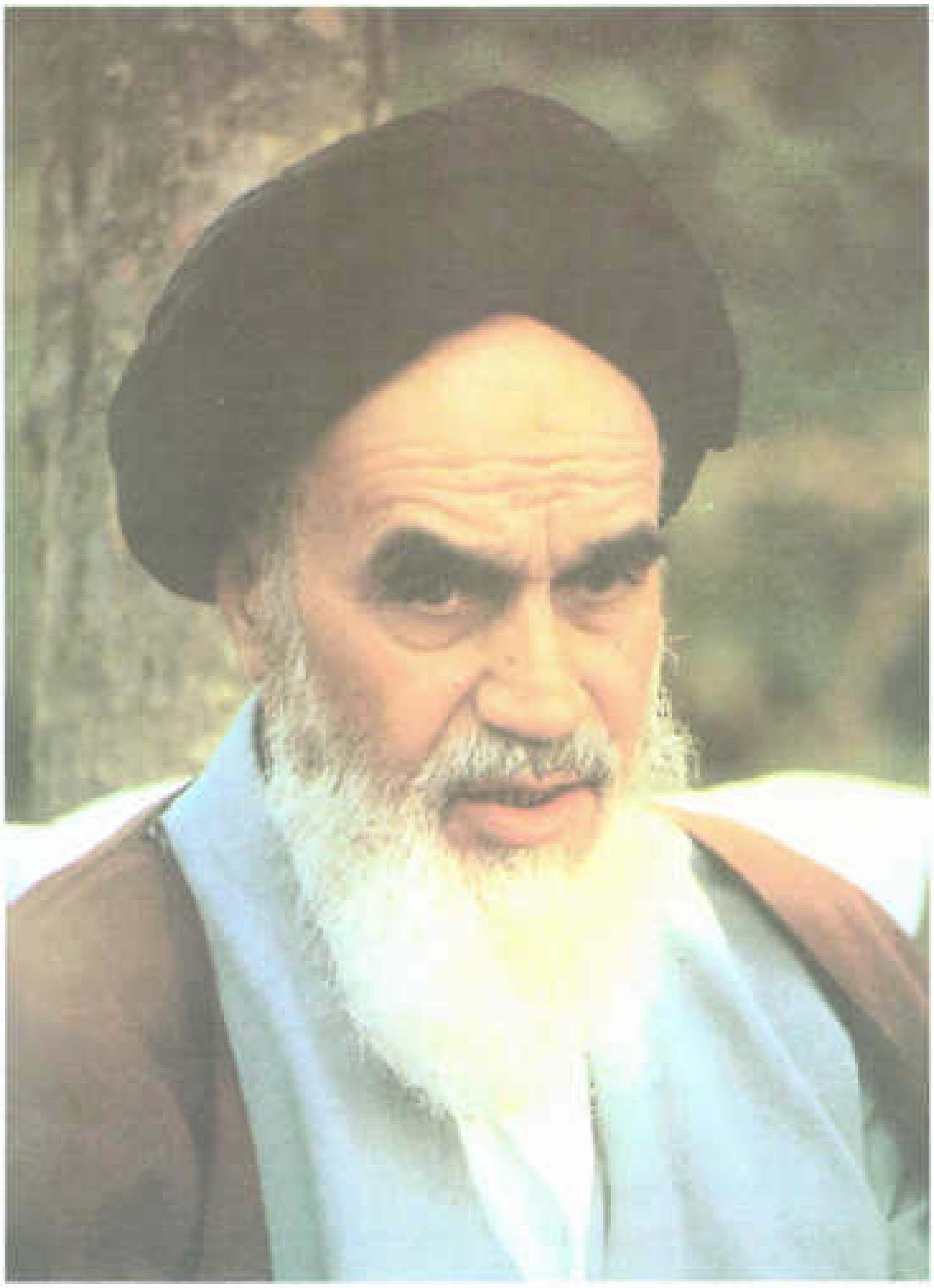
طراح جلد : علیرضا رضائی‌کُر

ناشر : شرکت صنایع آموزشی (وابسته به وزارت آموزش و پرورش) تهران ـ جاده‌ی مخصوص کرج ـ بعد از کیلومتر ۷ ـ ابتدای بزرگراه آزادگان به طرف جنوب، تلفن:۴۵۲۲۲۴۲، دورنگار : ۴۵۰۴۷۷۰، صندوق پستی:۱۳۴۴۵/۳۷۹

چاپخانه : شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران

سال انتشار و نوبت چاپ : چاپ دوم ۱۳۸۴

ISBN 964-05-1281-8 شابک ۸-۱۲۸۱-۰۵-۹۶۴



شما عزیزان کوشش کنید که از این وابستگی بیرون آیید و احتیاجات کشور خودتان را برآورده سازید، از نیروی انسانی ایمانی خودتان غافل نباشید و از اتکای به اجانب بپرهیزید.

امام خمینی «قدّس سرّه الشّریف»

پیشگفتار

هنرجویان شاخه‌ی آموزش‌های فنی و حرفه‌ای امروزه به عنوان نسل جوان و آینده‌ساز جامعه‌ی ما، پا به عصری می‌گذارند که **عصر دانایی** لقب گرفته است. در این عصر که گستره‌ای از اطلاعات متنوع در دسترس انسان قرار گرفته است کسانی توان رویارویی و سازگاری با جهان پیشرفته را دارند که دارای ذهنی پویا، متفکر و نقاد باشند و بتوانند از میان انبوه اطلاعات، مفیدترین آن‌ها را انتخاب کنند و به‌کار گیرند.

بر این اساس، دانش‌آموزان ما باید اصولی آموزش ببینند تا بتوانند از دانش روز بهره‌ی **کافی** گرفته و توانایی فنّاورانه‌ی مناسبی جهت چالش با جهان کنونی به‌دست آورند. مسلّم است که یکی از مهم‌ترین عوامل اصلی و زیربنایی آموزش و پیشرفت در زمینه‌ی فنّاوری، دانش ریاضی است و ما باید بکوشیم تدریس این علم را به شیوه‌ی مؤثر در نظام آموزشی خود ترویج کنیم.

از آن‌جا که تدریس مؤثر ریاضی نیازمند به چالش انداختن و درگیرساختن هنرجویان و سهیم نمودن آن‌ها در فرایند یادگیری است. کتاب حاضر به گونه‌ای تدوین شده که آموزش هر مفهوم، حتی‌المقدور، با طرح مسئله‌ای کاربردی شروع شود و حل آن در قالب یک یا چند فعالیت، در گروه‌های کوچک از هنرجویان و با راهنمایی‌های لازم دبیر درس انجام گیرد. بدین طریق یادگیرنده درگیر مدل‌سازی مسئله‌های واقعی، حل مسئله و انتخاب بهترین راه حل‌ها می‌شود. **کار در کلاس‌هایی** نیز به منظور خودآزمایی و تقویت هنرجویان در پرداختن به ریاضی **به طور مستقل** در نظر گرفته شده است؛ با این حال هنرجویان، در صورت لزوم، می‌توانند از راهنمایی‌های لازم دبیر خود برخوردار شوند.

با توجه به این که این اولین کتاب ریاضی تألیف شده برای هنرجویان شاخه‌ی فنی و حرفه‌ای، به سبک پودمانی، است و با تأکید بر فعالیت یادگیرنده تدوین شده است، از کلیه‌ی عزیزانی که به نحوی با این کتاب در ارتباط قرار می‌گیرند تقاضا داریم پیشنهادها و انتقادهای خود را به نشانی سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی،دفتر برنامه‌ریزی و تألیف آموزش‌های فنی و حرفه‌ای و کاردانش صندوق پستی ۱۵/۴۸۷۴ارسال نمایند و ما را از راهنمایی‌های خود بهره‌مند سازند.

در خاتمه از آقای مهندس عبدالمجید خاکی صدیق به خاطر مطالعه‌ی دقیق دست‌نویس کتاب و راهنمایی‌های سازنده تشکر می‌نماییم.

مؤلفان

فهرست مطالب

بخش اول ــ یادآوری و تکمیل ویژگی‌های تابع

بخش دوم ـــ حد و پیوستگی

بخش سوم ــ مشتق و کاربردهای آن

هدف کلی کتاب

درک مفهوم تابع، حدّ، پیوستگی و مشتق و کاربردهای آن‌ها به منظور پیدا نمودن توانایی‌های لازم برای مدل‌سازی پدیده‌های ساده به زبان ریاضی و بررسی شیوه‌ها و فنون پاسخ‌گویی به سؤالات و مسائل مربوط به آن‌ها.

جدول عناوین بخش‌ها

شماره‌ی بخش	عنوان بخش	زمان
بخش اول	یادآوری و تکمیل ویژگی‌های تابع	۴۴ ساعت
بخش دوم	حدّ و پیوستگی	۴۰ ساعت
بخش سوم	مشتق و کاربردهای آن	۳۶ ساعت

بخش اول

یادآوری و تکمیل ویژگی‌های تابع

هدف کلی بخش

آشنایی با ویژگی‌ها و شیوه‌های مختلف نمایش یک تابع، عملیات روی تابع‌ها و کاربردهای آن‌ها در زمینه‌های مختلف.

جدول عناوین فصل‌ها

شماره‌ی فصل	عنوان فصل	زمان
اول	محور اعداد	۸ ساعت
دوم	بازه	۶ ساعت
سوم	تابع	۱۰ ساعت
چهارم	دامنه‌ی تابع‌های حقیقی	۶ ساعت
پنجم	عملیات روی تابع‌ها	۶ ساعت
ششم	ترکیب دو تابع	۸ ساعت

بخش اول

فصل اول

محور اعداد

هدف کلی

یادآوری مطالب مربوط به محور اعداد و دستگاه مختصات

هدف‌های رفتاری: انتظار می‌رود فراگیر پس از پایان این فصل بتواند :

۱ــ محور اعداد را تعریف کند.

۲ ــ دستگاه مختصات را رسم کند.

۳ ــ مختصات نقطه‌های صفحه‌ی مختصات را تعیین کند.

۴ ــ نقطه‌های داده شده را روی صفحه‌ی مختصات مشخص کند.

پیش‌آزمون (۱)

۱ـ محور اعداد را تعریف کنید.

۲ـ x نقطه‌های روی محور را تعیین کنید (شکل ۱ـ۱).

۳ـ اگر $x_A = -3$ ، $x_B = \frac{1}{2}$ و $x_C = 0/75$ نقطه‌های A، B و C را روی محور اعداد مشخص کنید (شکل ۲ـ۱).

۴ـ نقطه‌های زیر را در یک دستگاه مختصات قائم مشخص کنید:

$$A\begin{vmatrix}2\\1\end{vmatrix} ، B\begin{vmatrix}-1\\-2\end{vmatrix} ، C\begin{vmatrix}0\\4\end{vmatrix}$$

۵ـ معادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $x + 8 = 0$

ب) $2x + 3 = x - 5$

پ) $\frac{3}{2}x + 2 = \frac{1}{6}x + 7$

۶ـ دستگاه زیر را حل کنید.

$$\begin{cases}2x - y = 3\\ x + 3y = 5\end{cases}$$

۷ـ نقطه‌های $A\begin{vmatrix}2\\0\end{vmatrix}$ ، $B\begin{vmatrix}-2\\-2\end{vmatrix}$ ، $C\begin{vmatrix}0\\-1\end{vmatrix}$ و $D\begin{vmatrix}-1\\4\end{vmatrix}$ داده شده‌اند.

الف) کدام نقطه روی محور xها قرار دارد؟

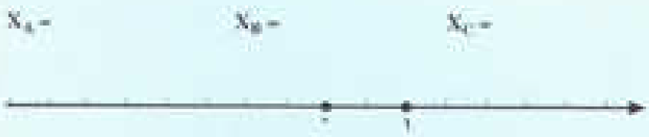
ب) کدام نقطه روی محور yها قرار دارد؟

پ) کدام نقطه روی نیمساز ربع اول و سوم قرار دارد؟

ت) کدام نقطه در ناحیه‌ی سوم دستگاه مختصات است؟

محل پاسخ به سؤالات پیش‌آزمون (۱)

شکل ۱ـ۱



شکل ۲ـ۱

۱ـ۱ـ محور اعداد

فعالیت ۱ـ۱

۱) یک خط راست، در زیر، رسم کنید.

رنه دکارت (کارتزین): ارائه‌دهنده‌ی دستگاه مختصات

۲) یک نقطه به عنوان مبدأ روی این خط انتخاب کنید و آن را O بنامید.

۳) در دو طرف نقطه‌ی O با یکای (واحد) مشخص، خط را تقسیم‌بندی کنید.

۴) یک سوی خط را مثبت در نظر بگیرید و آن را با پیکان مشخص کنید.

۵) عدد نظیر نقطه‌ی O را صفر بگیرید.

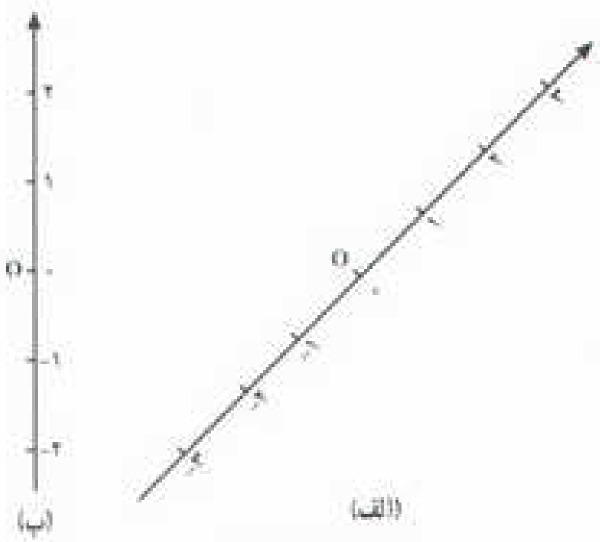
۶) عددهای صحیح نظیر نقطه‌های دیگر تقسیم‌بندی را بنویسید.

شما به این ترتیب یک محور اعداد، مشابه محور اعداد ساخته‌اید (شکل ۳ـ۱).

نکته: محور اعداد می‌تواند به صورت افقی، قائم یا مایل رسم شود؛ امّا، معمولاً آن را به صورت افقی یا قائم رسم می‌کنند.

در شکل ۴ـ۱ دو محور اعداد در جهت‌های مختلف ملاحظه می‌کنید.

شکل ۳ـ۱

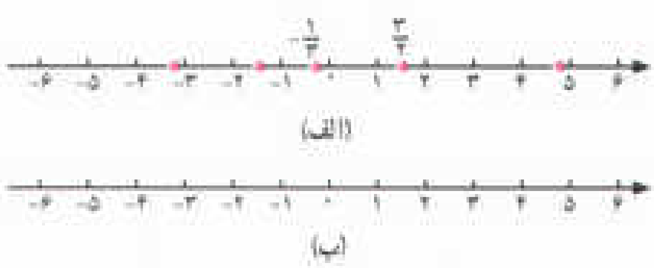


شکل ۴ـ۱

فعالیت ۲ـ۱

۱) روی محور اعداد (الف) چند نقطه و عدد نظیر هر یک مشخص شده‌اند. عددهای نظیر نقطه‌های قرمز را بنویسید (شکل ۵ـ۱).

۲) نقاط نظیر عددهای ۳، $-\frac{5}{4}$ ، $-\frac{7}{2}$ و $\sqrt{2}$ را روی محور (ب) مشخص کنید.



شکل ۵ـ۱

۳) نقطه‌ی نظیر $\sqrt{2}$ را چگونه تعیین کردید؟

۴) دانش‌آموزی نقطه‌ی نظیر $\sqrt{2}$ را به این صورت مشخص کرده است. او می‌گوید: عدد $\sqrt{2}$ در ماشین حساب به صورت عدد اعشاری ...۱/۴۱۴۲ است. این عدد را تا یک رقم اعشار گرد می‌کنیم تا عدد ۱/۴ به دست آید. بعد، نقطه‌ی نظیر ۱/۴ را تعیین می‌کنیم. به نظر شما این روش مناسب است؟ نقطه‌ی نظیر $\sqrt{3}$ را به این روش مشخص کنید.

۵) یک محور اعداد رسم کنید و بر روی آن اعداد 10^{-3}، 2×10^{-3}، 10×10^{-3} و $(-7)\times10^{-3}$ را مشخص کنید.

از فعالیت ۲ــ۱ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

هر نقطه از محور اعداد یک عدد حقیقی را مشخص می‌کند و به عکس، به ازای هر عدد حقیقی، تنها یک نقطه روی محور اعداد حقیقی وجود دارد.

یعنی: یک تناظر یک به یک بین نقطه‌های محور اعداد و عددهای حقیقی برقرار است.

شکل ۶ــ۱ــ خط‌کش مدرج

۱ــ۱ــ۱ــ مختص نقطه

محور اعداد افقی را معمولاً با $x'ox$ نشان می‌دهند. عدد نظیر هر نقطه از این محور را x نقطه (بخوانید: ایکسِ نقطه) یا مختص نقطه می‌نامند. مثلاً، x نقطه‌ی A مساوی عدد ۵، x نقطه‌ی B عدد ۹، x نقطه‌ی C مساوی ۳- ، x نقطه‌ی D مساوی ۲/۵ و x نقطه‌ی F مساوی ۱- است (شکل ۶ــ۱).

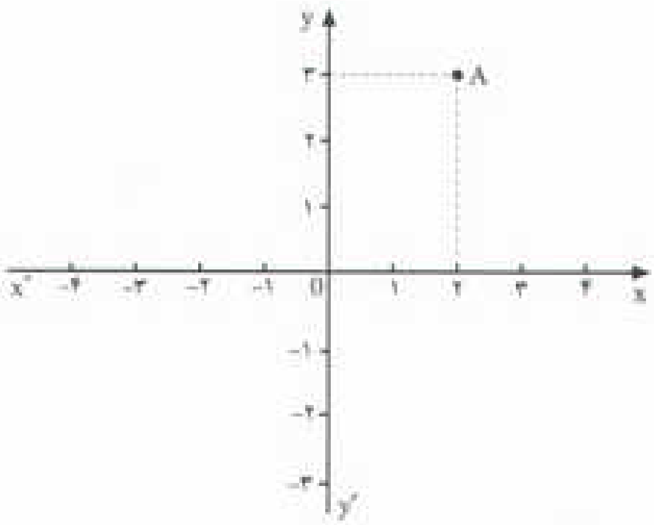

شکل ۷ــ۱

در شکل ۷ــ۱ کناره‌ی سمت چپ دماسنج بخشی از یک محور اعداد قائم را مشخص می‌کند. محور اعداد قائم را معمولاً با $y'oy$ نشان می‌دهند. دماسنج چه دمایی را نشان می‌دهد؟

۲ـ۱ـ۱ـ دستگاه محورهای مختصات: با دو محور اعداد افقی و قائم، که مبدأ مشترک داشته باشند، یک دستگاه محورهای مختصات ساخته می‌شود (شکل ۸ـ۱).

این دستگاه مختصات را، دستگاه مختصات قائم (دکارتی) می‌نامند. هر نقطه‌ی واقع در صفحه‌ی این دستگاه مختصات، دارای دو مختص است. به عنوان مثال، نقطه‌ی A دارای دو مختص است. عدد ۲ مختص اول A یا x نقطه‌ی A یا x_A است. عدد ۳ مختص دوم A یا y نقطه‌ی A است.

معمولاً می‌نویسیم $A\left|\begin{matrix}۲\\۳\end{matrix}\right.$ یا A(۲،۳)، یعنی، برای نقطه‌ی A، ۲ = x_A و ۳ = y_A است.



شکل ۸ـ۱

> به‌طور کلی، A(x,y) یا $A\left|\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right.$ را می‌خوانیم A به مختصات x و y.

فعالیت ۳ـ۱

دستگاه مختصات xoy داده شده است (شکل ۹ـ۱).

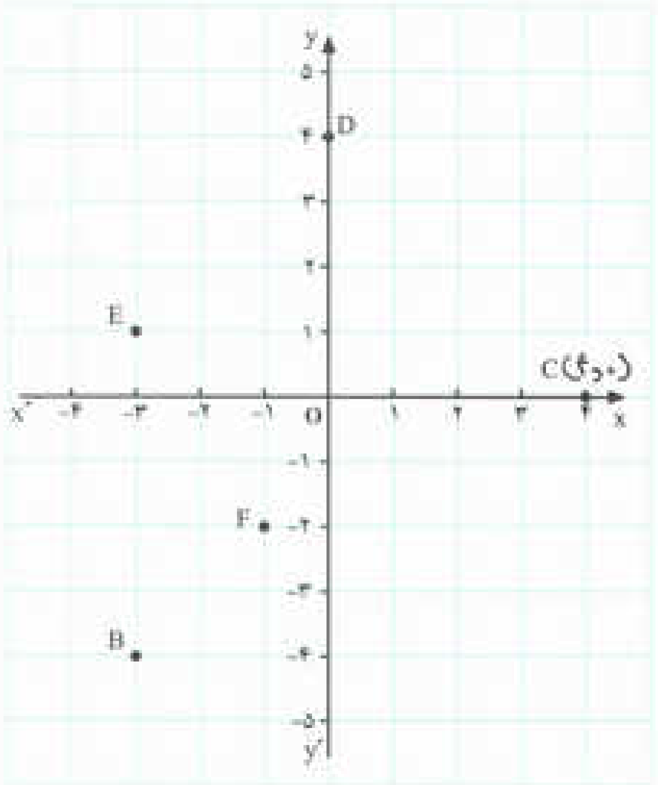
الف) مختصات نقطه‌های E ،D ،C ،B و F را بنویسید.

B(,), C(,), D(,), E(,), F(,).

ب) نقطه‌های G(−۲،۲) ، H(۳،−۲) و K(−۳،۰) را روی این دستگاه مختصات مشخص کنید.

ج) نقطه‌ی B را به نقطه‌ی E وصل کنید. توضیح دهید چرا پاره‌خط BE موازی محور y'oy است؟

د) پاره‌خط FH را رسم کنید. چرا این خط موازی محور x'ox است؟



شکل ۹ـ۱

فعالیت ۴ـ۱

۱) دستگاه محورهای مختصات قائم xoy را رسم کنید.
۲) در این دستگاه نقطه‌های A(۲, ۱) ، B(−۱, −۲) ، C(۰, ۳) و D(−۲,۰) را مشخص کنید.
۳) قرینه‌ی نقطه‌ی A را نسبت به محور x′ox تعیین کنید و آن را A_1 بنامید. مختصات A_1 را بنویسید.
۴) قرینه‌ی نقطه‌ی A را نسبت به محور y′oy تعیین کنید و آن را A_2 بنامید، مختصات A_2 را بنویسید.
۵) قرینه‌ی نقطه‌ی A را نسبت به مبدأ مختصات تعیین کنید و آن را A_3 بنامید، مختصات نقطه‌ی A_3 را بنویسید.

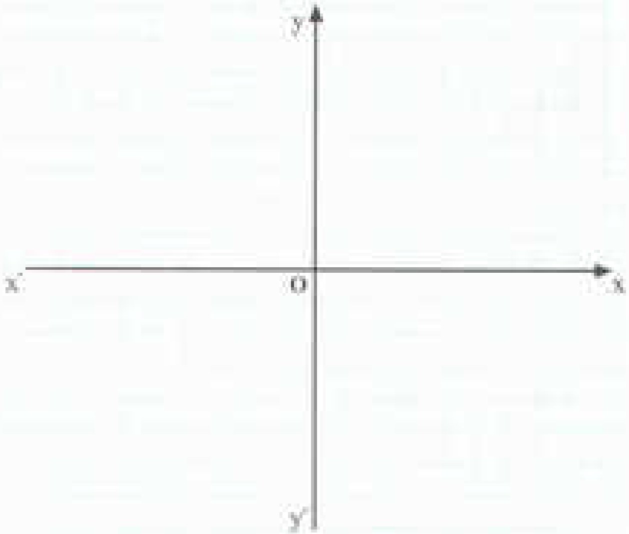
کار در کلاس ۱ـ۱

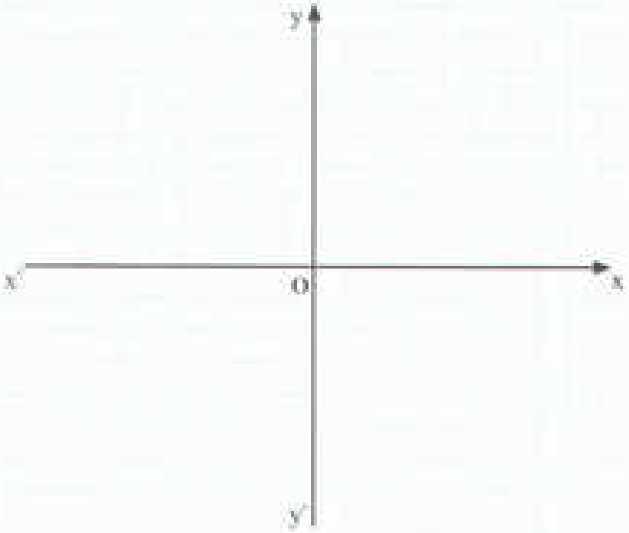
۱) از شکل‌های روبه‌رو کدام محور اعداد است؟ (شکل ۱۰ـ۱).

شکل ۱۰ـ۱

الف	
ب	
ج	
د	
هـ	

۲) جمله‌ی زیر را کامل کنید.
یک خط مستقیم سودار (جهت‌دار) که یک نقطه به عنوان ... و یک ... روی آن مشخص شده باشد ... نامیده می‌شود.
۳) x کدام یک از نقطه‌های زیر مساوی ۲ است؟
B(−۱,۲) ، C(۰,۳) ، D(۲,۱) ، E(۰,−۲) ، F(۲,۲)
۴) y کدام یک از نقطه‌های زیر مساوی ۱− است؟
A(۰,۲) ، B(۲,−۱) ، C(۱,۲) ، D(−۱,۰) ، E(۰,۱)





۵) از نقطه‌های زیر، چند نقطه روی محور $y'oy$ است؟

جواب: ... نقطه

$O(۰,۰)$ ، $E(۱,۰)$ ، $D(۰,۲)$ ، $C(۲,-۲)$ ، $B(-۲,۳)$

۶) کدام نقطه روی محور $x'ox$ قرار دارد؟

$F(۱,-۱)$، $E(۲,۲)$، $D(۴,۱)$، $C(۰,۲)$، $B(۳,۰)$، $A(۳,۲)$

۷) عدد m را چنان تعیین کنید که نقطه‌ی $A(m+۱,۲)$ روی محور $y'oy$ باشد، سپس مختصات A را بنویسید.

۸) عدد k را طوری تعیین کنید که نقطه‌ی $B(۱,۲k-۱)$ روی محور $x'ox$ باشد، سپس مختصات B را بنویسید.

۹) عددهای s و t را طوری تعیین کنید که نقطه‌ی $C(s,t-۱)$ بر نقطه‌ی $D(۲,۳)$ منطبق باشند، سپس مختصات C را بنویسید.

تمرین ۱ـ۱

۱) اعداد زیر را به کمک ماشین‌حساب، تا دو رقم اعشار بنویسید. سپس نقطه‌ی نظیر هر عدد را روی محور اعداد مشخص کنید (برای مشخص کردن جای نقطه‌ی نظیر هر عدد، آن عدد را تا یک رقم اعشار گرد کنید).

$\frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۰/۸۶ \cong ۰/۹$.

$\sqrt{۴/۵} =$

$-\sqrt{۱/۵} =$

$\frac{\pi}{۲} =$

۲) اگر A و B دو نقطه روی یک محور اعداد افقی باشند و x نقطه‌ی A کمتر از x نقطه‌ی B باشد، روی این محور اعداد، A در کدام سمت B قرار دارد؟ (شکل ۱۱ـ۱).

شکل ۱۱ـ۱

۳) یک دستگاه مختصات قائم رسم کنید.

الف) دو نقطه‌ی $A(۲,۱)$ و $B(۲,-۴)$ را مشخص کنید. پاره‌خط AB را رسم کنید. این پاره‌خط با کدام محور موازی است؟ چرا؟

ب) نقطه‌ی $C(۴,۱)$ را مشخص کنید. پاره‌خط AC را رسم کنید. این پاره‌خط با کدام محور موازی است؟ چرا؟

ج) نقطه‌ی $D(-۲,-۱)$ را مشخص کنید. پاره‌خط AD را رسم کنید. چرا این پاره‌خط از مبدأ مختصات می‌گذرد؟

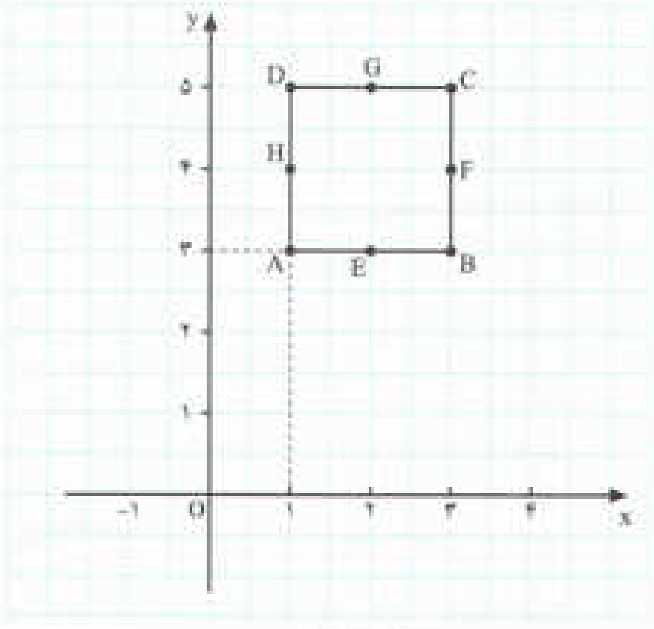
د) نقطه‌ی $E(۳,۳)$ را مشخص کنید. پاره‌خط OE را رسم کنید (O مبدأ مختصات است). زاویه‌ی پاره‌خط OE با محورها چند درجه است؟

۴) در دستگاه مختصات xoy نقطه‌ی A(۱,۳) رأس مربع ABCD، به ضلع ۲ سانتی‌متر است، که ضلع‌های آن موازی محورهای مختصات است (شکل ۱۲ـ۱).

الف) مختصات نقطه‌های B، C و D (سه رأس دیگر مربع) را تعیین کنید.

ب) مختصات نقطه‌های E، F، G و H (وسط ضلع‌ها) را به‌دست آورید.

ج) مختصات محل تلاقی قطرهای مربع را به‌دست آورید.



شکل ۱۲ـ۱

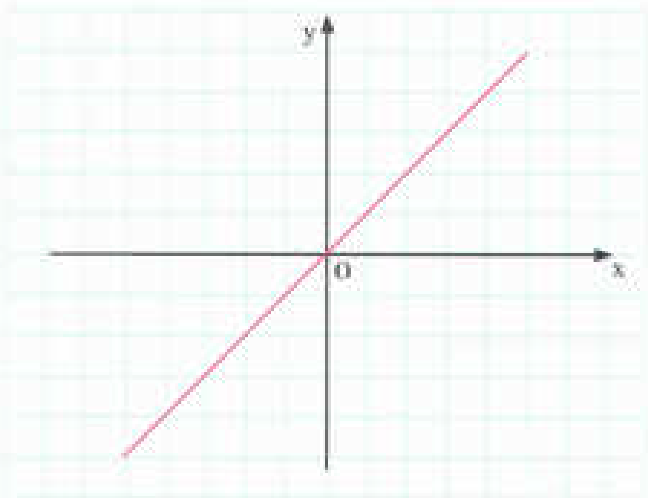
۵)

الف) مقدار a را چنان تعیین کنید که نقطه‌ی A(a − ۱,۲) روی محور y′oy باشد.

ب) مقدار b را طوری تعیین کنید که نقطه‌ی B(۳,۲b + ۱) روی محور x′ox باشد.

ج) مقدار c را چنان تعیین کنید که نقطه‌ی D(۲c,c − ۱) روی نیمساز ربع اول و سوم باشد.

د) مقدارهای d و e را طوری تعیین کنید که دو نقطه‌ی F(d − ۱,e) و G(e + ۱,d − e) بر هم منطبق باشند.

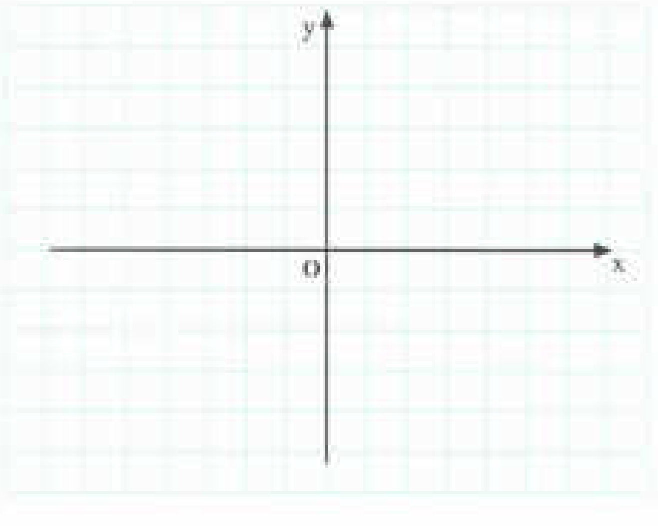


۶) در یک دستگاه مختصات xoy سه نقطه‌ی A(۱,۵)، B(۱,۲) و C(۵,۲) را مشخص کنید.

الف) مثلث ABC را رسم کنید. ABC چه نوع مثلثی است؟ چرا؟

ب) مساحت مثلث ABC را به‌دست آورید.

ج) طول ضلع‌های این مثلث را حساب کنید.



آزمون پایانی (۱)

۱ــ نقطه‌های نظیر عددهای زیر را روی محور اعداد داده شده مشخص کنید (شکل ۱۳ــ۱).

$-۱/۵$ ، ۳ ، $\frac{۷}{۲}$ ، $\sqrt{۱۰}$

۲ــ x نقطه‌های داده شده روی محور اعداد را بنویسید (شکل ۱۴ــ۱).

۳ــ نقطه‌های زیر را روی یک دستگاه مختصات قائم مشخص کنید.

$A\begin{vmatrix}-۲\\ ۱\end{vmatrix}$ ، $B\begin{vmatrix}۰\\ ۳\end{vmatrix}$ ، $C\begin{vmatrix}۲\\ ۲\end{vmatrix}$ ، $D\begin{vmatrix}-۱\\ ۰\end{vmatrix}$

۴ــ مختصات نقطه‌های مشخص‌شده روی دستگاه مختصات xoy را بنویسید (شکل ۱۵ــ۱).

$A\Big|$ $\qquad B\Big|$ $\qquad C\Big|$

۵ــ عدد b را چنان تعیین کنید که نقطه‌ی $A\begin{vmatrix}b+۱\\ ۳\end{vmatrix}$

الف) روی محور yها باشد ؛

ب) روی نیمساز ربع اول و سوم باشد ؛

پ) روی نیمساز ربع دوم و چهارم باشد.

۶ــ سه نقطه‌ی $A\begin{vmatrix}۲\\ ۱\end{vmatrix}$ ، $B\begin{vmatrix}-۲\\ ۱\end{vmatrix}$ و $C\begin{vmatrix}۰\\ ۵\end{vmatrix}$ را در یک دستگاه مختصات قائم مشخص کنید.

الف) مثلث ABC را رسم کنید.

ب) نوع مثلث را تعیین کنید.

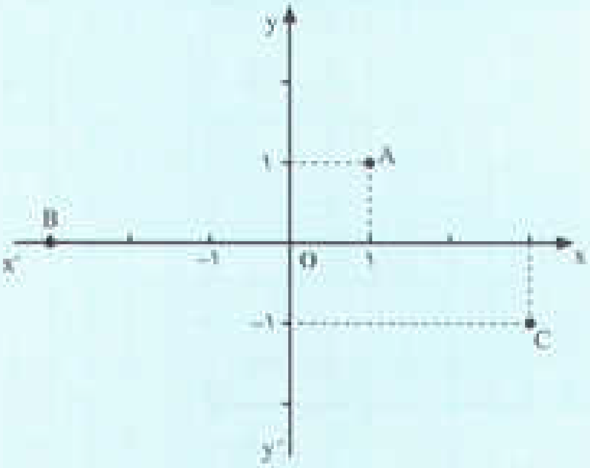
پ) مساحت مثلث را حساب کنید.

محل پاسخ به سؤالات آزمون پایانی

شکل ۱۳ــ۱

$x_A=$ $\qquad x_B=$ $\qquad x_C=$

شکل ۱۴ــ۱



شکل ۱۵ــ۱

بخش اول

فصل دوم

بازه

هدف کلی

یادآوری مفهوم بازه و تکمیل مفهوم‌های وابسته به آن

هدف‌های رفتاری: انتظار می‌رود فراگیر پس از پایان این فصل بتواند:

۱ـ بازه را تعریف کند.

۲ـ انواع بازه را به‌صورت مجموعه بنویسد.

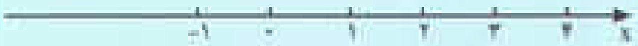
۳ـ انواع بازه را روی محور اعداد نمایش دهد.

۴ـ اعمال روی بازه‌ها را انجام دهد.

پیش آزمون (۲)

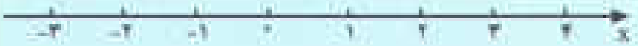
محل پاسخ به سؤالات پیش آزمون

۱ــ مجموعه‌ی $\{x \in \mathbb{R} : 1 \le x \le 3\}$ را روی محور اعداد نمایش دهید و به‌صورت بازه نیز بنویسید (شکل ۱۶ــ۱).



شکل ۱۶ــ۱

۲ــ بازه‌ی $[-3,-1)$ را روی محور اعداد نمایش دهید (شکل ۱۷ــ۱). این بازه را به‌صورت مجموعه نیز بنویسید.



شکل ۱۷ــ۱

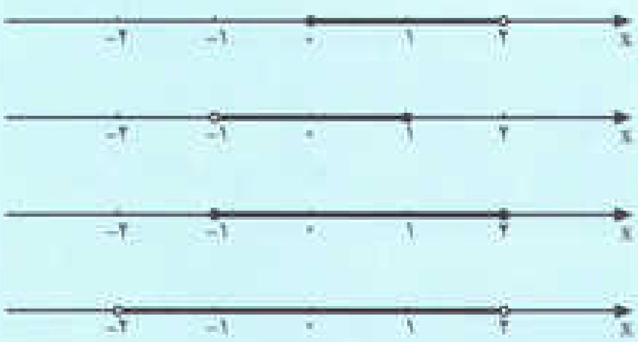
۳ــ بازه‌ی مربوط به هر محور اعداد را بنویسید (شکل ۱۸ــ۱).

الف) $[\dots,\dots)$

ب) $(\dots,\dots]$

پ) $[\dots,\dots]$

ت) $(\dots,\dots)$



شکل ۱۸ــ۱

۴ــ مجموعه‌ی جواب هر یک از نامعادله‌های زیر را به‌صورت بازه بنویسید.

الف) $0 \le 3x+2 \le 1$

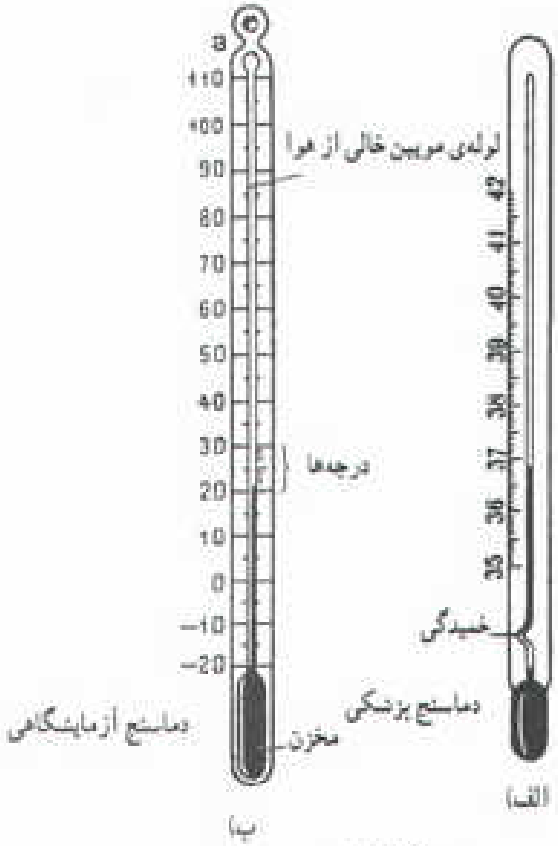
ب) $-1 \le \frac{2x-1}{3} \le 2$

۲ــ۱ــ بازه

به دماسنج پزشکی نگاه کنید. این دماسنج دماهای ۳۵°C تا ۴۲°C را اندازه می‌گیرد (شکل ۱۹ــ۱).

بازه‌ی دمایی این دماسنج [۳۵,۴۲] است. توجه داشته باشید که در بازه‌ی بالا، تمام اعداد حقیقی از ۳۵ تا ۴۲، و اعداد ۳۵ و ۴۲، قرار دارند. یعنی،

$$[۳۵,۴۲]=\{x\in\mathbb{R}:۳۵\le x\le ۴۲\}$$



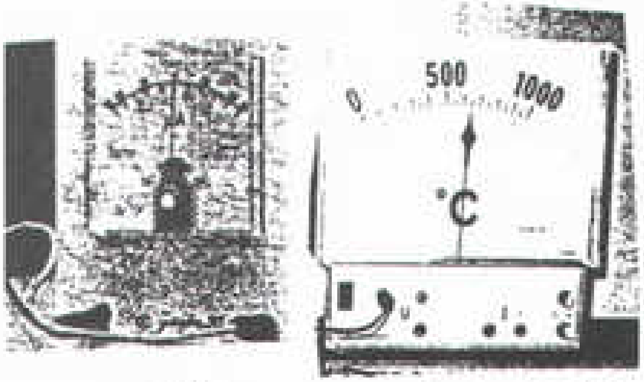
شکل ۱۹ــ۱

فعالیت ۵ــ۱

۱) بازه‌ی دمایی دماسنج آزمایشگاهی را بنویسید و آن را با نماد مجموعه نیز نشان دهید (شکل ۱۹ــ۱).

۲) بازه‌ی دمایی دماسنج عقربه‌ای را بنویسید و آن را با نماد مجموعه نیز نشان دهید (شکل ۲۰ــ۱).

۳) به میکروآمپرمتر (گالوانومتر) نگاه کنید (شکل ۲۰ــ۱). بازه‌ی جریان‌های الکتریکی را که این دستگاه اندازه می‌گیرد بنویسید و آن را با مجموعه نیز نمایش دهید.



الف) دماسنج عقربه‌ای　　ب) گالوانومتر

شکل ۲۰ــ۱

هر بازه را به سه صورت می‌توان نشان داد:

الف) با استفاده از نماد بازه، برای نمونه، [۱,۲]؛

ب) با استفاده از نماد مجموعه، برای نمونه، $\{x\in\mathbb{R}:۱\le x\le ۲\}$؛

ج) با استفاده از محور اعداد برای نمونه،

بازه‌ی [۱,۲] را **بازه‌ی بسته‌ی یک و دو** می‌خوانیم؛ زیرا عددهای ۱ و ۲ نیز به این بازه تعلق دارند (شکل ۲۱ــ۱).

$[۱,۲]=\{x\in\mathbb{R}:۱\le x\le ۲\}$

شکل ۲۱ــ۱

نمونه‌های دیگری از بازه را در زیر ملاحظه می‌کنید.

بازه‌ی (۱,۲) را **بازه‌ی باز یک و دو** می‌گوییم. این بازه شامل **تمام اعداد حقیقی بین یک و دو**، به جز یک و دو، است (شکل ۲۲ــ۱).

$(۱,۲)=\{x\in\mathbb{R}:۱< x< ۲\}$

شکل ۲۲ــ۱

بازه‌ی [۱,۲) را نیم باز از راست می‌گویند (شکل ۲۳ــ۱).

[۱,۲) را بخوانید: **بازه‌ی بسته‌ی یک و باز دو**.

$[۱,۲)=\{x\in\mathbb{R}:۱\le x< ۲\}$

شکل ۲۳ــ۱

بازه‌ی (۱،۲] را نیم‌باز از چپ گویند. (۱،۲] را بخوانید: **بازه‌ی باز یک و بسته‌ی دو** (شکل ۲۴ـ۱).

شکل ۲۴ـ۱

کار در کلاس ۲ـ۱

۱) هریک از بازه‌های زیر را به‌صورت مجموعه بنویسید.

$[-2,100)=$

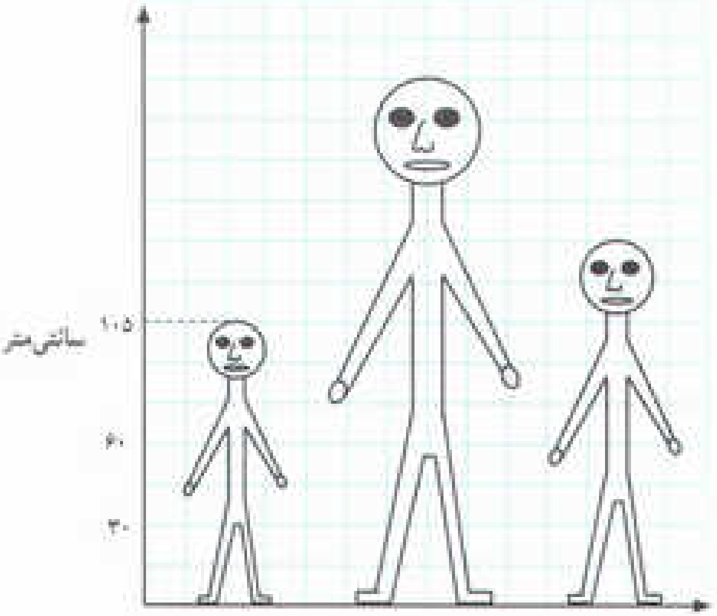
$(1,\sqrt{2})=$

$\left[-1/5,\frac{3}{7}\right]=$

۲) مجموعه‌های زیر را به‌صورت بازه بنویسید.

$\{x\in\mathbb{R}: -1<x\le 2\}=$

$\{x\in\mathbb{R}: \sqrt{2}\le x\le \sqrt{5}\}=$



شکل ۲۵ـ۱

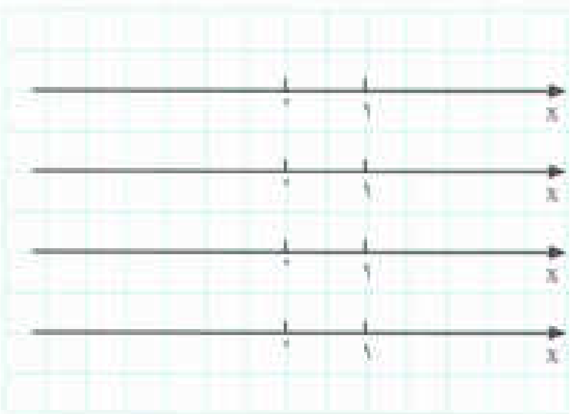
۳) هر بازه را روی محور اعداد نمایش دهید.

$[-2,3]$

$[-3,0)$

$(1,3)$

$(-1,2]$



شکل ۲۶ـ۱

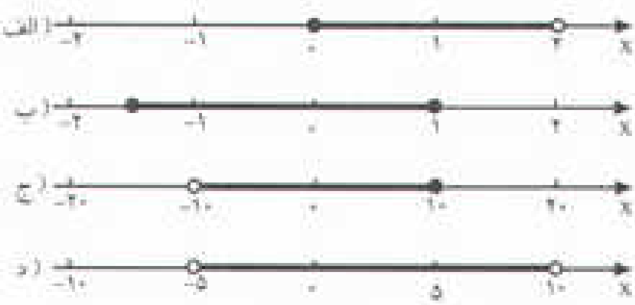
۴) بازه‌ی مربوط به هر شکل را با نماد بازه بنویسید (شکل ۲۷ـ۱).

$[\cdots,\cdots)$

$[\cdots,\cdots]$

$(\cdots,\cdots]$

$(\cdots,\cdots)$

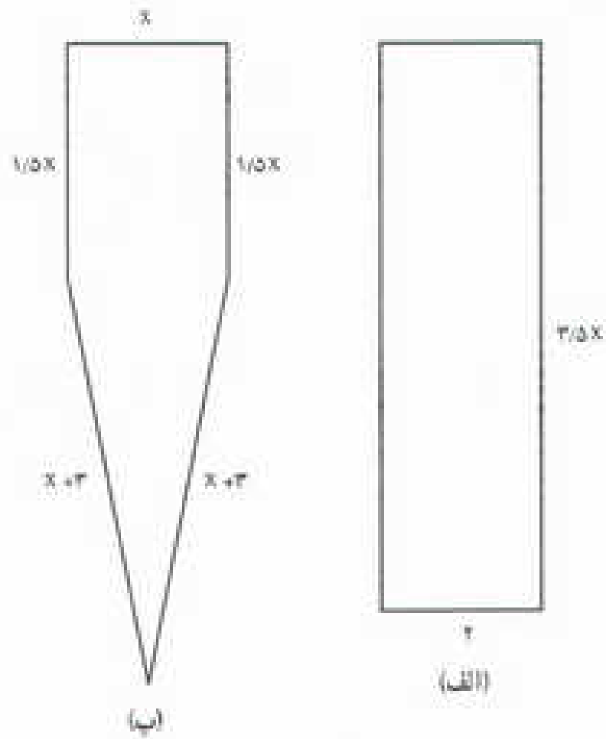


شکل ۲۷ـ۱

تمرین ۲ـ۱

۱) نامعادله‌ی $x^2 < 4$ را در نظر بگیرید. این نامعادله را حل کنید و مجموعه‌ی جواب آن را به‌صورت بازه بنویسید و روی محور اعداد نیز نمایش دهید.

۲) شکل‌های زیر داده شده‌اند. حدود x را چنان تعیین کنید که محیط شکل (ب) بیشتر از محیط شکل (الف) باشد (شکل ۲۸ـ۱).



شکل ۲۸ـ۱

۳) مجموعه‌ی $\{x \in \mathbb{R}: -1 \le x < 2\}$ با کدام بازه برابر است؟

ب) $(-1,2)$ الف) $[-1,2]$

د) $(-1,2]$ ج) $[-1,2)$

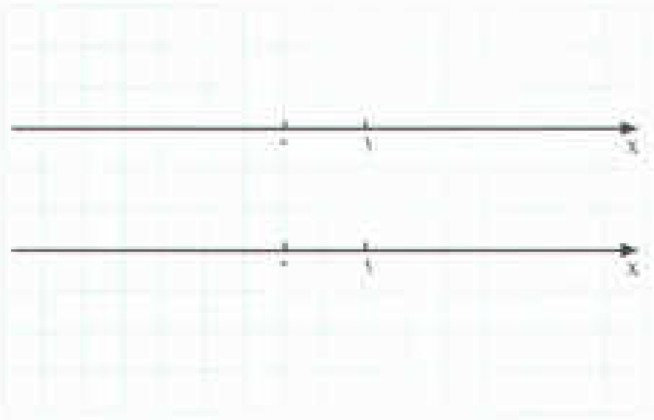
۴) مجموعه‌ی زیر را به‌صورت بازه بنویسید :

$\{x \in \mathbb{R}: -\sqrt{۲} < x \leq ۱/۵\}$ جواب :

۵) بازه‌های زیر را روی محور اعداد نمایش دهید (شکل ۲۹ـ۱).

الف) $(-۱,۳]$

ب) $(-۲,۴)$



شکل ۲۹ـ۱

۶) اگر a یک عدد حقیقی و $r > ۰$ آنگاه $(a-r, a+r)$
یک بازه به مرکز a و شعاع r نامیده می‌شود (شکل ۳۰ـ۱).

شکل ۳۰ـ۱

مثلاً، بازه‌ی $(-۱,۳)$ به مرکز $۱ = \frac{-۱+۳}{۲}$ و شعاع $۲ = \frac{۳-(-۱)}{۲}$ است.

در بازه‌های زیر مرکز و شعاع بازه را تعیین کنید.

الف) $(-۲,۰)$

ب) $(-۴,۱)$

پ) $(۱,۵)$

ت) $(\sqrt{۲}, ۲+\sqrt{۲})$

۱ـ۲ـ۱ـ معرفی بی‌نهایت

فعالیت ۶ـ۱

۱) در عبارت‌های زیر واژه‌ی **بی‌نهایت** را توصیف کنید.

ـ من مادرم را بی‌نهایت دوست دارم؛

ـ در مجموعه‌ی اعداد طبیعی بی‌نهایت عدد زوج وجود دارد؛

ـ در بازه‌ی $(0,1)$ بی‌نهایت عدد گویا وجود دارد.

غروب خورشید در دریا

۲) چند عبارت بیان کنید که در آن‌ها واژه‌ی بی‌نهایت به کار رفته باشد، سپس منظور خود را از به‌کاربردن این واژه توضیح دهید.

۳) نامعادله‌ی $x > 2$ را در نظر بگیرید. جواب این نامعادله روی محور اعداد شکل ۳۱ـ۱ مشخص شده است.

شکل ۳۱ـ۱

۴) به پرسش‌های زیر پاسخ دهید.

آیا عدد ۱۰ در معادله‌ی بالا صدق می‌کند؟ ۱۰۰۰ چطور؟ ۱۰۰ میلیون چطور؟ نقاط متناظر با این اعداد در کدام سمت محور قرار دارند؟

آیا شما، یا یکی از همکلاسی‌های شما، می‌توانید **بزرگ‌ترین عددی** را که در نامعادله صدق می‌کند نام ببرید؟ توضیح دهید چرا؟

> ریاضی‌دان‌ها $+\infty$ (بی‌نهایت) را، که نمادی قراردادی است و یک عدد نیست، ابداع کرده‌اند. این نماد بیانگر این مطلب است که اگر x **یک عدد حقیقی دلخواه باشد**، x از $+\infty$ **کوچک‌تر است**. یعنی،
>
> اگر $x \in \mathbb{R}$ آنگاه $x < +\infty$
>
> می‌توان گفت که: $+\infty$ از هر عدد حقیقی مثبت بزرگی، بزرگ‌تر است.

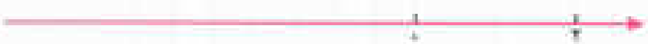
بنابراین، **مجموعه‌ی جواب** نامعادله‌ی $x > 2$ را می‌توان با بازه‌ی $(2,+\infty)$ نمایش داد (شکل ۳۲ـ۱).

شکل ۳۲ـ۱

فعالیت ۷ـ۱

نامعادله‌ی $x \leq 2$ را در نظر بگیرید.

۱) جواب این نامعادله را روی محور اعداد (شکل ۳۳ـ۱) مشخص کنید.



شکل ۳۳ـ۱

۲) آیا عدد ۳- در نامعادله‌ی بالا صدق می‌کند؟

عدد ۵- چطور؟

اعداد ۳- و ۵- را روی یک محور اعداد مشخص کنید.

۳) آیا اعداد ۱۰-، ۱۰۰-، ۱۰۰۰- و ۱۰۰۰۰۰- نیز در این معادله صدق می‌کنند؟

۴) آیا می‌توانید کوچک‌ترین عدد حقیقی را که در این نامعادله صدق می‌کند نام ببرید؟ توضیح دهید چرا؟

مطابق آن‌چه در فعالیت ۶ـ۱ گفته شد، جواب نامعادله‌ی $x \leq 2$ با بازه‌ی $(-\infty, 2]$ نشان داده می‌شود.

> به‌طور کلی، اگر x یک عدد حقیقی دلخواه باشد آنگاه $x > -\infty$. یعنی، هر عدد حقیقی از $-\infty$ (منهای بینهایت) بزرگ‌تر است. می‌توان گفت که: $-\infty$ از هر عدد حقیقی منفی کوچکی، کوچک‌تر است.

بنابراین، اگر x عددی حقیقی باشد آنگاه،

$$-\infty < x < +\infty$$

و درنتیجه می‌توان نوشت:

$$\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$$

یعنی، مجموعه‌ی اعداد حقیقی همان مجموعه‌ی اعداد متعلق به بازه‌ی $(-\infty, +\infty)$ است.

شکل ۳۴ـ۱

یادآور می‌شویم که $+\infty$ و $-\infty$ **عدد نیستند**. ضمناً به‌جای $+\infty$ از نماد ∞ نیز استفاده می‌شود.

کار در کلاس ۳ـ۱

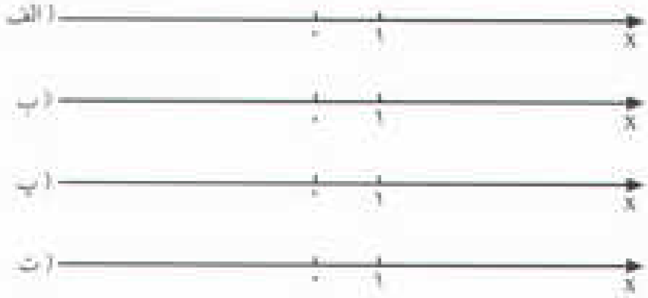
۱) هریک از نامعادله‌های زیر را حل کنید، سپس جواب آن را به‌صورت بازه بنویسید و روی محور اعداد نمایش دهید.

الف) $2x \leq 5$

ب) $3x \leq 8$

پ) $2 - 4x \leq 6$

ت) $x^2 \geq 0$



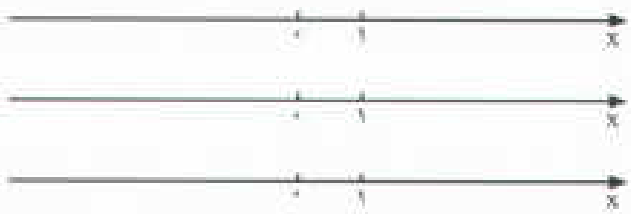
شکل ۳۵ـ۱

۲) مجموعه‌های زیر را به‌صورت بازه بنویسید و روی محور اعداد نمایش دهید.

$\{x \in \mathbb{R} : x < 3\}$

$\{x \in \mathbb{R} : \geq -1\}$

$\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$


شکل ۳۶ـ۱

۳) مجموعه‌ی جواب‌های نامعادله‌ی $x^2 > 1$ را به‌دست آورید و آن را روی محور اعداد شکل ۳۷ـ۱ نمایش دهید. آیا مجموعه‌ی جواب‌های این نامعادله یک بازه است؟

آیا می‌توان مجموعه‌ی جواب‌های نامعادله‌ی $x^2 > 1$ را به کمک بازه‌ها نوشت؟ چگونه؟


شکل ۳۷ـ۱

تمرین ۳ـ۱

۱) هریک از بازه‌های روبه‌رو با کدام یک از مجموعه‌های زیر برابر است؟

$A=\{x\in\mathbb{R}: x\le ۲\}$ ، $B=\{x\in\mathbb{R}: -۱\le x<\sqrt{۳}\}$

$C=\{x\in\mathbb{R}: x>-۱\}$ ، $D=\{x\in\mathbb{R}: -۲\le x<۲\}$

الف) $(-۱,+\infty)$

ب) $[-۲,۲)$

پ) $[-۱,\sqrt{۳})$

ت) $(-\infty,۲]$

۲) هر یک از بازه‌های روبه‌رو را به صورت مجموعه بنویسید.

الف) $(-۲,+\infty)$

ب) $[-۲,\sqrt{۲})$

پ) $[-۴,۳]$

ت) $(-\infty,۵]$

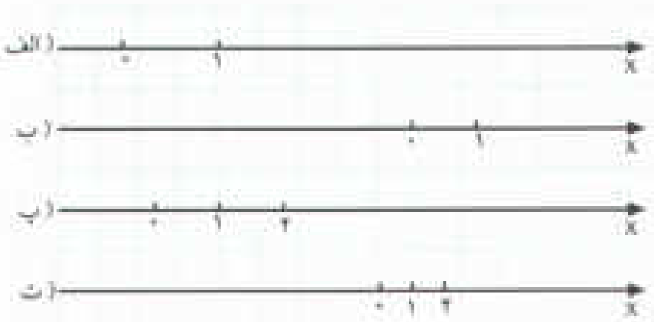
۳) بازه‌های زیر را روی محور اعداد نمایش دهید (شکل ۳۸ـ۱).

الف) $(۱,۴]$

ب) $(-\infty,۱]$

پ) $[۲,+\infty)$

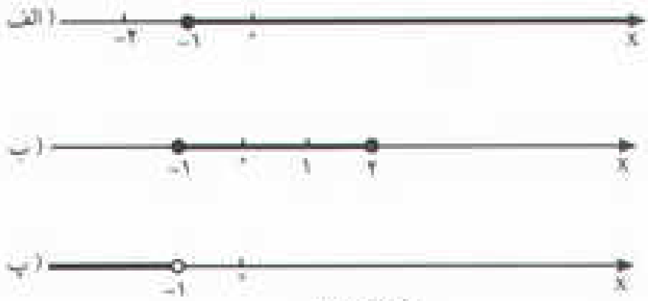
ت) $(-۵,۲)$



شکل ۳۸ـ۱

۴) مجموعه‌ی نقاطی که روی هر محور نشان داده شده با کدام بازه‌ی مقابل آن برابر است؟ (شکل ۳۹ـ۱)

الف) $(-\infty,-۱]$ ، $[-۱,+\infty)$ ، $[-۲,+\infty)$

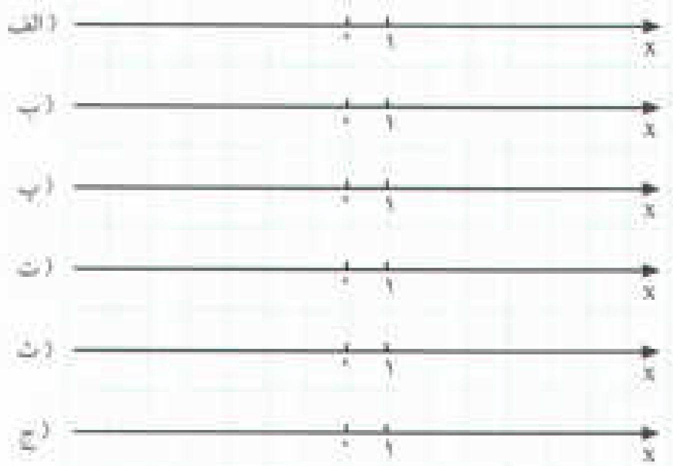


ب) $(-۱,۲)$ ، $[-۱,۲]$ ، $[-۱,۲)$

پ) $(-۱,\infty)$ ، $(-\infty,-۱)$ ، $(-\infty,-۱]$

شکل ۳۹ـ۱

۵) هریک از نامعادله‌های زیر را حل کنید و جواب آن‌ها را به‌صورت مجموعه و بازه بنویسید و روی محور اعداد نیز نمایش دهید (شکل ۴۰ـ۱).



الف) $۲x > ۰$

ب) $۳x + ۱ < ۷$

پ) $x^۲ \leq ۰$

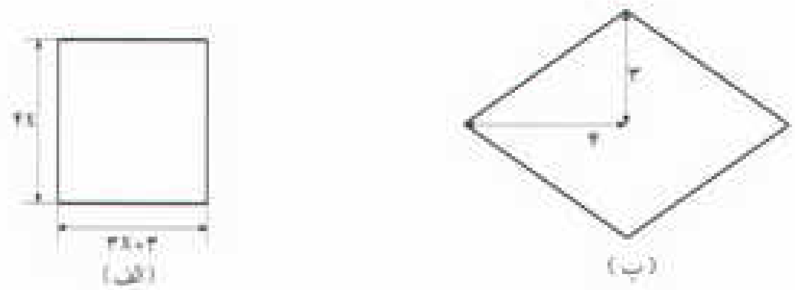
ت) $۲x - ۱ < ۰$

ث) $x^۲ + ۱ < ۵$

ج) $(x - ۱)(x + ۲) < ۰$

شکل ۴۰ـ۱

۶) x در چه بازه‌ای باشد تا مساحت شکل (الف) از مساحت شکل (ب) بیشتر باشد؟ (شکل ۴۱ـ۱)



شکل ۴۱ـ۱

۷) می‌خواهیم با استفاده از ۲۷۰۰۰ گرم آلومینیوم با چگالی (جرم واحد حجم) ۲/۷، ورق آلومینیوم بسازیم. درصورتی که ضخامت ورق‌های لازم حداقل ۲ میلی‌متر و حداکثر ۱۰ میلی‌متر باشد، بازه‌ی مساحت ورق‌هایی که می‌توان ساخت تعیین کنید.

۸) هریک از نامعادله‌های زیر را حل کنید و جواب آن‌ها را به صورت بازه بنویسید.

الف) $۳x - ۱ < ۱۱$

ب) $۲ - ۳x \leq ۱۴$

ج) $x^۲ \leq ۱۶$

۲ـ۲ـ۱ـ عملیات روی بازه‌ها

فعالیت ۸ـ۱

بازه‌های $(0,2]$ و $[1,4]$، به ترتیب، با رنگ‌های آبی و قرمز، روی محور اعداد روبه‌رو نمایش داده شده‌اند (شکل ۴۲ـ۱).

شکل ۴۲ـ۱

۱) اشتراک این دو بازه را با نماد بازه بنویسید.

$(0,2]\cap[1,4]=$

۲) اجتماع این دو بازه را با نماد بازه بنویسید.

$(0,2]\cup[1,4]=$

۳) بازهٔ سمت راست تساوی زیر را بنویسید.

$(1,4]-[0,2]=$

۴) در جاهای خالی نمادهای مناسب بنویسید.

$[1,4] \quad (0,2]=(0,4]$

$(0,2] \quad [1,4]=(0,1)$

$(0,2] \quad [1,4]=[1,2]$

$(0,2] \quad [1,4]=(0,4]$

فعالیت ۹ـ۱

۱) یک محور اعداد افقی رسم کنید و آن را محور $t'ot$ بنامید.

۲) روی محور $t'ot$ ساعت‌های صفر تا ۲۴ را مشخص کنید.

فرض کنید بیشترین مصرف برق در شهر شما از ساعت ۱۸ تا ۲۳، و بیشترین مصرف آب در شهر شما از ساعت ۱۱ تا ۲۱ باشد.

۳) بازهٔ مصرف برق را روی محور $t'ot$ با رنگ قرمز مشخص کنید.

۴) بازهٔ مصرف آب را روی محور $t'ot$ با رنگ آبی مشخص کنید.

۵) در چه بازه‌ی زمانی مصرف آب و برق، بیشترین است؟ این بازه را روی شکل مشخص کنید و آن را با نماد بازه نیز بنویسید.

۶) در چه بازه‌ی زمانی میزان مصرف آب یا برق، بیشترین است؟ این بازه را روی شکل مشخص کنید و آن را با نماد بازه نیز نمایش دهید.

کار در کلاس ۴ـ۱

احمد در ساعت ۸ صبح در شهر تنکابن سوار اتوبوس شد. رضا در ساعت ۱۰ صبح در چالوس سوار همان اتوبوس شد. احمد ساعت ۱۲:۱۵ در کرج پیاده شد. رضا در ساعت ۱۴:۳۰ به تهران رسید (شکل ۴۳ـ۱).

۱) بازه‌ی زمانی را که احمد در اتوبوس بوده است، بنویسید. این بازه را A بنامید.

۲) بازه‌ی زمانی را که رضا در اتوبوس بوده است، بنویسید. این بازه را B بنامید.

۳) در چه بازه‌ی زمانی احمد و رضا هر دو در اتوبوس بوده‌اند؟

۴) در چه بازه‌ی زمانی احمد بدون رضا در اتوبوس بوده است؟

۵) در چه بازه‌ی زمانی رضا بدون احمد در اتوبوس بوده است؟

۶) پاسخ قسمت‌های (۳)، (۴) و (۵) را با استفاده از اعمال بازه‌ها (مجموعه‌ها) بنویسید.

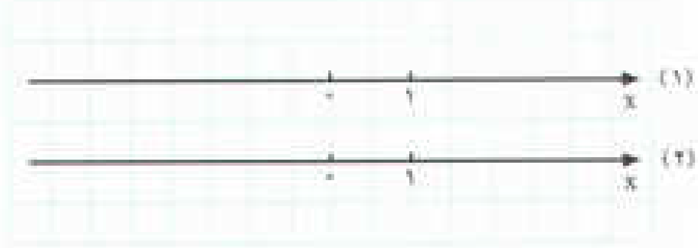
شکل ۴۳ـ۱

تمرین ۴ـ۱

۱) مجموعه جواب نامعادله‌های

(۱) $۲x < ۳$

(۲) $۳ - ۴x \leq ۴$



شکل ۴۴ـ۱

را، به‌ترتیب، با بازه‌های C و D نمایش دهید، سپس به سؤالات زیر پاسخ دهید. (می‌توانید از محور اعداد کمک بگیرید.)

الف) بازه‌های C و D را به‌دست آورید. D= C=

ب) در چه بازه‌ای هر دو نامعادله برقرار است؟

پ) در چه بازه‌ای فقط نامعادله‌ی (۲) برقرار است؟

ت) در چه بازه‌ای فقط نامعادله‌ی (۱) برقرار است؟

ث) در چه بازه‌ای حداقل یکی از دو نامعادله برقرار است؟

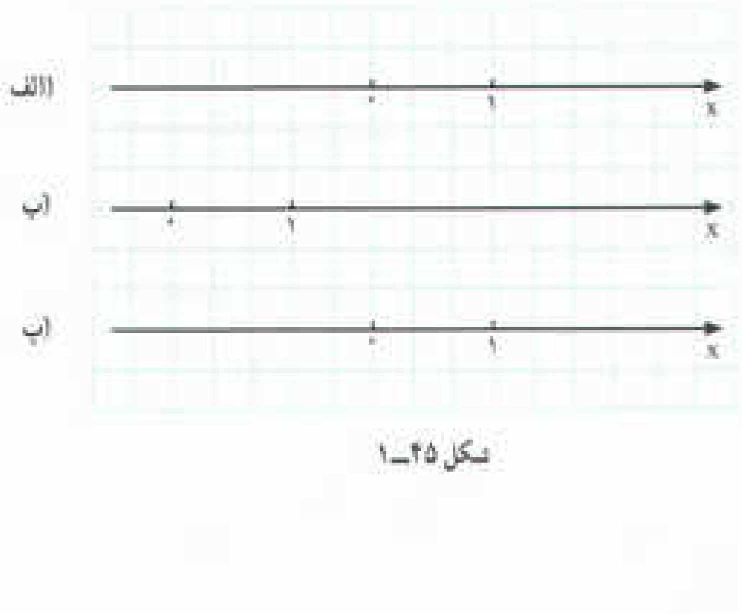
ج) در چه بازه‌ای نامعادله‌ی (۱) برقرار نیست؟

۲) اجتماع و اشتراک هر جفت از بازه‌های زیر را تعیین کنید. (راهنمایی : از محور اعداد کمک بگیرید.)

الف) $[۰,۲] , [۰,۱)$

ب) $[-۱,۳) , (۰,۴]$

ب) $[-۲,۱] , [۱,۳)$.



شکل ۴۵ـ۱

۳) اگر $A=[-۱,۲]$ و $B=(۰,۳]$ بازه‌های زیر را تعیین کنید.

الف) $A\cup B$ ب) $A\cap B$ پ) $A-B$ ت) $B-A$

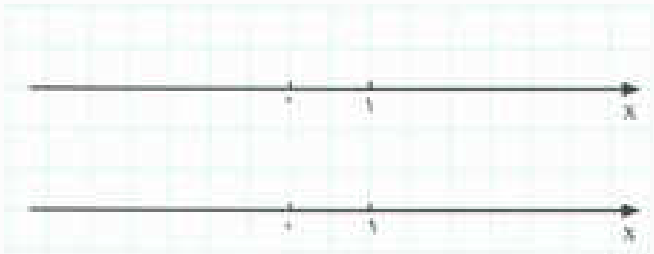
۴) اگر داشته باشیم :

$$A=\{x\in\mathbb{R} : x>۱\}$$

$$B=\{x\in\mathbb{R} : x\leq ۴\}$$

الف) این مجموعه‌ها را روی محور اعداد نمایش دهید.

ب) مجموعه‌های $A-B$ و $B-A$ را روی محور اعداد نمایش دهید.



شکل ۴۶ــ۱

پ) $A\cap B$ کدام بازه است؟

الف) $(۱,۴)$

ب) $[۱,۴)$

پ) $(۱,۴]$

ت) $[۱,۴]$

ت) $A\cup B$ کدام بازه است؟

الف) $(۱,۴]$

ب) $\mathbb{R}$

پ) $[۴,+\infty)$

ت) $(-\infty,۱)$

آزمون پایانی (۲)

۱ــ هریک از مجموعه‌های زیر را به‌صورت بازه بنویسید.

$$A=\{x\in\mathbb{R}: -۲\le x<۴\}$$

$$B=\left\{x\in\mathbb{R}: \frac{۱}{۲}<x\le\frac{۳}{۵}\right\}$$

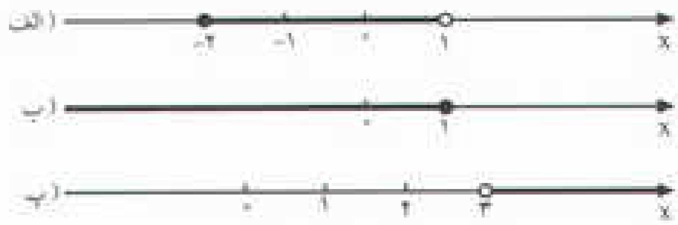
۲ــ هریک از بازه‌های زیر را به‌صورت مجموعه بنویسید و روی محور اعداد نیز نمایش دهید.

الف) $[-۴,۵]$

ب) $(-\frac{۳}{۲},\frac{۷}{۲})$

پ) $[-۱,\frac{۵}{۲})$

۳ــ بازه‌ی مشخص شده روی هر محور را بنویسید.



۴ــ شکل‌های روبه‌رو داده شده‌اند. حدود x را چنان بیابید که محیط شکل (الف) از محیط شکل (پ) بیشتر و از محیط شکل (ب) کمتر باشد (شکل ۴۷ــ۱).

۵ــ هریک از بازه‌های $(۲,+\infty)$ ، $(-\infty,۳)$ ، $[۲,+\infty)$ و $(-\infty,۳]$ با کدام یک از مجموعه‌های زیر برابرند؟

$A=\{x\in\mathbb{R}: x\ge ۲\}$, $B=\{x\in\mathbb{R}: x<۳\}$

$C=\{x\in\mathbb{R}: x\le ۳\}$, $D=\{x\in\mathbb{R}: x>۲\}$

محل پاسخ به سؤالات آزمون پایانی

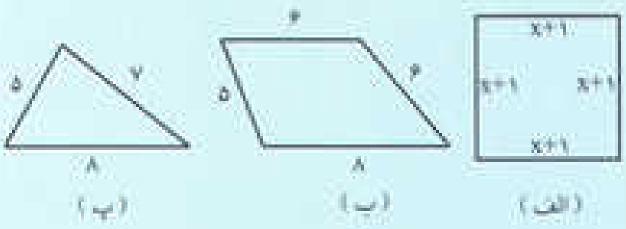
A=

B=

الف)

ب)

پ)



شکل ۴۷ــ۱

A=

B=

C=

D=

۶ــ هریک از نامعادله‌های زیر را حل کنید و جواب آن‌ها را به‌صورت مجموعه و بازه بنویسید و روی محور اعداد نیز نشان دهید.

الف) $-۲x+۵>۰$

ب) $\frac{x+۱}{۳}>\frac{۱}{۲}$

پ) $\frac{x+۲}{۲}-\frac{x}{۳}<۰$

ت) $۴x^۲<۹$

۷ــ مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی $۳x-۶<۰$ را A و مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی $-۲x+۱\leq ۰$ را با B نشان دهید. سپس به سؤال‌های زیر پاسخ دهید.

الف) مجموعه‌های A و B را با نماد بازه بنویسید.

ب) اشتراک بازه‌های به‌دست آمده را تعیین کنید.

پ) اجتماع بازه‌های به‌دست آمده را تعیین کنید.

۸ــ اجتماع و اشتراک هر جفت از بازه‌های زیر را تعیین کنید.

الف) $(۲,+\infty)$, $[-۲,۴]$

ب) $[-۳,۵]$, $[۱,۶)$

پ) $(-\infty,۱)$, $(۲,+\infty)$

محل پاسخ به سؤالات آزمون پایانی

بخش اول

فصل سوم

تابع

هدف کلی

تعمیق مفهوم تابع و ویژگی‌های مربوط به آن

هدف‌های رفتاری: انتظار می‌رود فراگیر پس از پایان این فصل بتواند :

۱ــ تابع را تعریف کند.

۲ــ تابع را با مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب نمایش دهد.

۳ــ تابع را از روی نمودار تشخیص دهد.

۴ــ دامنه‌ی تابع را تعیین کند.

۵ــ برد تابع را از روی نمودار آن تعیین کند.

۶ــ نمودار تابع‌های مثلثاتی $\sin x$ و $\cos x$ را رسم کند.

پیش‌آزمون (۳)

۱ــ کدام یک از رابطه‌های زیر تابع است؟

الف) $f=\{(۱,۲),(۲,۳),(۱,۳)\}$

ب) $g=\{(۱,۲),(۳,۲),(۵,۲)\}$

پ) $h=\{(-۱,۲),(-۲,۳),(-۳,۴),(۵,۱)\}$

۲ــ کدام یک از شکل‌های روبه‌رو نمایش یک تابع است؟ (شکل ۴۸ــ۱).

۳ــ تابع f با ضابطه‌ی زیر در R تعریف شده است :

$$f(x)=\begin{cases} x^{۳}, & x\geq ۰ \\ -x^{۲}, & x<۰ \end{cases}$$

الف) نمودار این تابع را رسم کنید.

ب) مقدارهای $f(-۲)$ ، $f(۳)$ و $f(۰)$ را حساب کنید.

۴ــ اگر $f(-۱)=۰$ ، $f(-۲)=-۱$ ، $f(-۳)=-۲$ و $f(۰)=-۱$ ، تابع f را به‌صورت زوج‌های مرتب بنویسید.

۵ــ تابع f به‌صورت زیر داده شده است.

$$f=\{(-۱,۰),(۲,۳),(۱,-۱),(۳,۲)\}$$

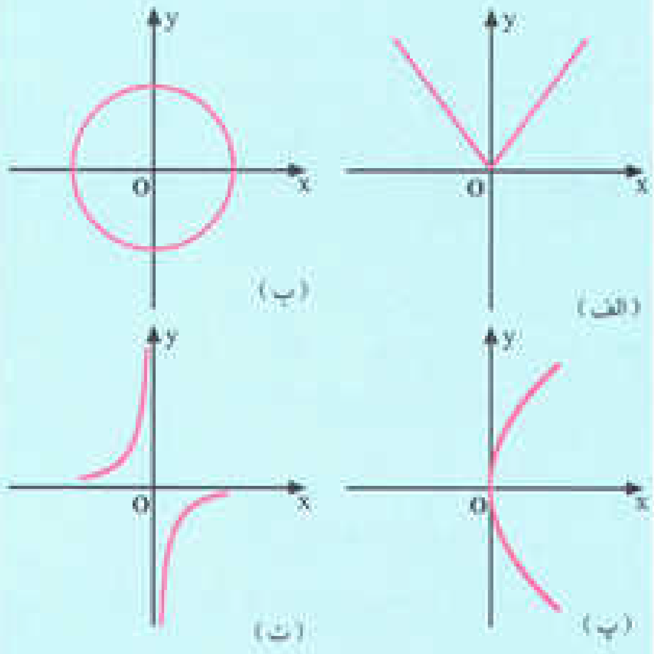
مطلوب است تعیین $f(-۱)$ ، $f(۲)$ و $f(۳)$.

۶ــ تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=x^{۲}+x+۱$ داده شده است. مطلوب است محاسبه‌ی :

$f(۲)$ ، $f(-x)$ ، $f(۳x)$

$f(\sqrt{x})$ ، $f(x-۱)$

محل پاسخ به سؤالات پیش‌آزمون



شکل ۴۸ــ۱

۷ــ تابع $f(x) = ۲\sin x$ و نقطه‌ی $m \left| \begin{array}{l} \frac{\pi}{۶} \\ a+۲ \end{array} \right.$ داده شده است. مقدار a را چنان بیابید که این نقطه روی نمودار تابع $y = f(x)$ باشد.

۸ــ تابع $y = a\sin x + b\cos x$ داده شده است. مقدار a و b را طوری تعیین کنید که نمودار این تابع از دو نقطه‌ی $A \left| \begin{array}{l} ۰ \\ ۱ \end{array} \right.$ و $B \left| \begin{array}{l} \frac{\pi}{۲} \\ ۲ \end{array} \right.$ بگذارد.

۹ــ کدام یک از رابطه‌های زیر ضابطه‌ی یک تابع است؟

الف) $۲x + y = ۷$

ب) $x + y^۲ - ۲ = ۰$

پ) $y + ۲x^۲ - x = ۱$

۱۰ــ اطلاعات جدول زیر را به‌صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب بنویسید. آیا این مجموعه یک تابع را مشخص می‌کند؟

x	۳	۴	۵	۶	۷
y	۲	۵	−۱	۲	۲

۱۱ــ مقدار هریک از تابع‌های زیر را به‌ازای xهای مشخص شده تعیین کنید (شکل ۴۹ــ۱).

الف) $f(x) = -۲x^۲ + x + ۳,\ x = -۱, \frac{۱}{۴}, ۲$

ب) $g(x) = \frac{۳x}{x-۲}, x = -۱, \frac{۱}{۲}, ۳$

پ) $h(x) = \sin(۲x + \frac{\pi}{۶}), x = \frac{\pi}{۶}, \frac{\pi}{۴}, \pi.$

محل پاسخ به سؤالات پیش‌آزمون

الف)

x	−۱	$\frac{۱}{۴}$	۲
f(x)			

ب)

x	−۱	$\frac{۱}{۲}$	۳
g(x)			

پ)

x	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۴}$	π
h(x)			

شکل ۴۹ــ۱

خواندنی

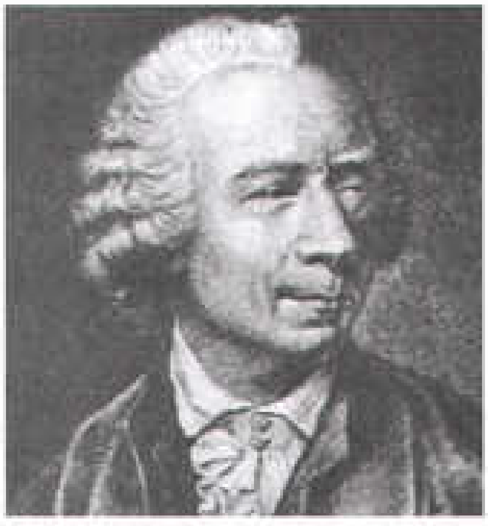
ظاهراً واژه‌ی تابع[1] را اولین بار لایب نیتز[2]، در سال ۱۶۹۴ به‌عنوان کمیتی وابسته به یک نمودار به‌کار برده است. در سال ۱۷۱۸ یوهان برنولی[3] یک تابع را به‌صورت عبارت‌هایی متشکل از چند ثابت و یک متغیر درنظر گرفت. بعداً در همین قرن اویلر[4] تابع را به‌عنوان معادله‌ای تشکیل یافته از ثابت‌ها و متغیرها بررسی کرد. اویلر به‌طور وسیعی از نماد بسیار پراهمیت $f(x)$ استفاده می‌کرد.

تعریف تابع که تا به امروز مورد استفاده قرار می‌گیرد توسط دیریکله[5] (۱۸۵۹ـ۱۸۰۵) فرمول‌بندی شده است. او می‌گوید: اگر دو متغیر x و y چنان به‌هم مربوط باشند که برای هر مقدار x **فقط یک مقدار** y به‌دست آید آنگاه y تابعی از x نامیده می‌شود. او x را متغیر مستقل و y را متغیر وابسته نامید، مقادیر y به مقادیری که به x نسبت داده می‌شود وابسته است. او مقادیر x را **دامنه‌ی تابع** و مقادیر y متناظر با آن‌ها را **برد تابع** نامید.

پس از بیان مفهوم مجموعه، تابع با مجموعه‌ای از **زوج‌های مرتب**[6] نیز بیان شد. [2]

گاتفرید لایب نیتز (۱۷۱۶ـ ۱۶۴۶)

یوهان برنولی(۱۷۴۸ـ ۱۶۶۷)



اویلر(۱۷۸۳ـ ۱۷۰۷)

گوستاو دیریکله (۱۸۵۹ـ ۱۸۰۵)

---

۱) Function
۲) Leibnitz
۳) Johann Bernoulli
۴) Euler
۵) Dirichlet
۶) Ordered pairs

۳ـ۱ـ تابع

یکی از مفاهیم مهم در ریاضیات، مفهوم تابع است. در اکثر امور روزمره با تابع سر و کار داریم. در این بخش ضمن معرفی چند تابع، مشخص نمودن تابع با ضابطه، با جدول و با نمودار، مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۱ـ۳ـ۱ـ تابع با ضابطه: برای تغییر ولتاژ (اختلاف پتانسیل) از ترانسفورمر استفاده می‌شود.

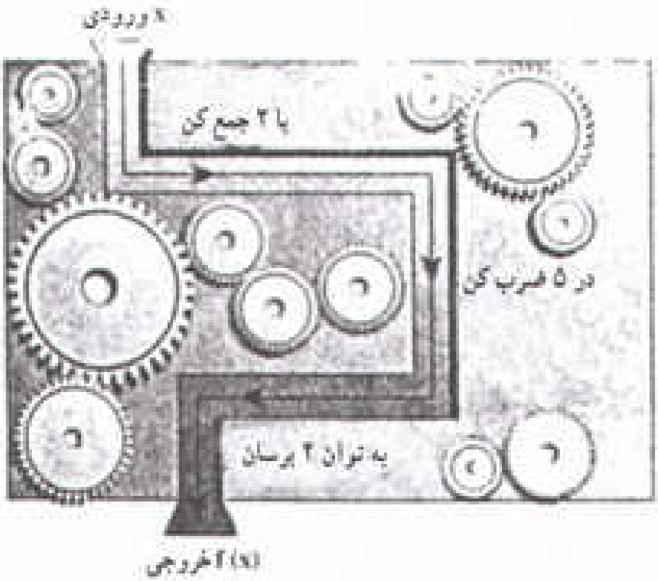
ارتباط بین $V_۱$ و $V_۲$ با رابطه‌ی (۱) بیان می‌شود که در آن a عددی ثابت است. رابطه‌ی (۱) نشان می‌دهد که ولتاژ خروجی **تابع** ولتاژ ورودی است. رابطه‌ی (۱) را **ضابطه‌ی** این تابع می‌گویند. در رابطه‌ی (۱) ثابت a به نوع ترانسفورمر بستگی دارد. با داشتن مقدار ولتاژ ورودی ($V_۱$) و مقدار ولتاژ خروجی ($V_۲$) می‌توان a را به‌دست آورد.

مثلاً، اگر a = ۰/۰۵ و $V_۱$ مساوی ۲۳۰ ولت باشد داریم:

$$V_۲ = aV_۱ \Rightarrow V_۲ = ۰/۰۵ \times ۲۳۰ = ۱۱/۵ \text{ ولت}$$

و اگر $V_۲$ مساوی ۱۰ ولت باشد آنگاه:

$$۱۰ = ۰/۰۵ \times V_۱ \Rightarrow V_۱ = \frac{۱۰}{۰/۰۵} = ۲۰۰ \text{ ولت}$$



شکل ۵۰ـ۱

ولتاژ خروجی $V_۲ \Leftarrow$ $\boxed{\text{ترانسفورمر}}$ $\Leftarrow V_۱$ ولتاژ ورودی

$$V_۲ = aV_۱ \qquad (۱)$$

کار در کلاس ۵ـ۱

۱) جدول ۱ـ۱ برای یک ترانسفورمر داده شده است.

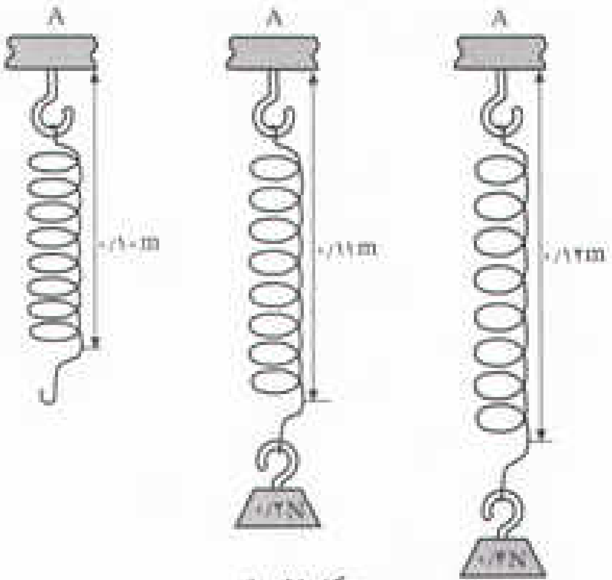
الف) با استفاده از جدول، عدد ثابت a را، از رابطه‌ی (۱)، به‌دست آورید.

ب) با استفاده از قسمت (الف) جدول را کامل کنید.

جدول ۱ـ۱

$V_۱$	۱۹۰	۲۰۰	۲۲۰		۲۴۰
$V_۲$	۱۹			۲۳	۲۴

۲) یک سر فنری به طول ۰/۱۰ متر به نقطه‌ی A بسته شده است (شکل ۵۱ـ۱). با آویختن وزنه‌های متفاوت به انتهای فنر، طول فنر مطابق جدول ۲ـ۱، تغییر کرده است. وزن وزنه را با W و طول فنر را با L نشان می‌دهیم.



شکل ۵۱ـ۱

الف) با توجه به شکل ۵۱ـ۱ یا جدول ۲ـ۱، ملاحظه می‌کنید که L تابع W است. آیا ضابطه‌ی این تابع به‌صورت روبه‌رو است؟ تحقیق کنید.

ب) با توجه به این ضابطه، جدول ۲ـ۱ را کامل کنید.

جدول ۲ـ۱

W	۰	۰/۲	۰/۴	۰/۶	۰/۸	۰/۹	۱
L	۰/۱۰	۰/۱۱	۰/۱۲		۰/۱۴		۰/۱۵

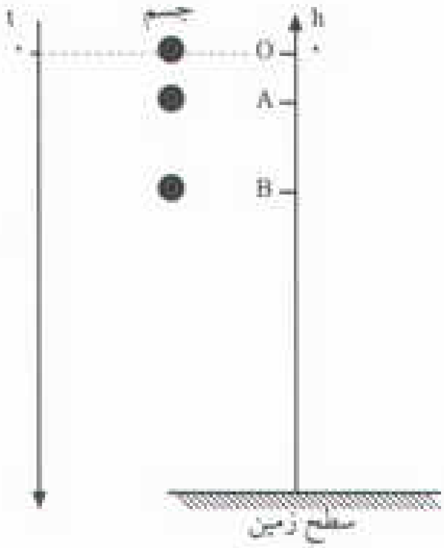
$$L = ۰/۱۰ + ۰/۰۵W$$

۳) گلوله‌ای از ارتفاع ۱۲۵ متری رها می‌شود (سقوط آزاد) (شکل ۵۲ـ۱). می‌دانید اگر فاصله‌ی یک نقطه از سطح زمین را با h و لحظه‌ی رسیدن به آن نقطه را با t نشان دهیم، رابطه‌ی زیر بین h و t برقرار است.

$$h = -\frac{۱}{۲}gt^۲$$

در این رابطه نقطه‌ی آغاز حرکت را مبدأ مختصات گرفته‌ایم $(t=۰, h=۰)$ و $g = ۱۰\frac{m}{s^۲}$ است.

جدول ۳ـ۱ مکان جسم را در لحظه‌های متفاوت نشان می‌دهد. شکل ۵۲ـ۱ نیز راهنمای جدول ۳ـ۱ است.



شکل ۵۲ـ۱

جدول ۳ـ۱

نقطه	t	h
O	۰	۰
A	۱	-۵
B	۲	-۲۰
C	۳	
D	۴	
E	۵	-۱۲۵

الف) جدول و شکل را کامل کنید.

ب) گلوله پس از چند ثانیه به سطح زمین برخورد می‌کند؟

پ) در چه لحظه‌ای فاصله‌ی گلوله از نقطه‌ی رها شده ۸۰ متر است؟

تمرین ۵ــ۱

۱) شکل ۵۳ــ۱ یک ورق آلومینیوم به شکل مستطیل، به طول ۵۰ سانتی‌متر و عرض x سانتی‌متر را نشان می‌دهد. واضح است که مساحت و محیط این ورق تابعی از متغیر x است.

شکل ۵۳ــ۱

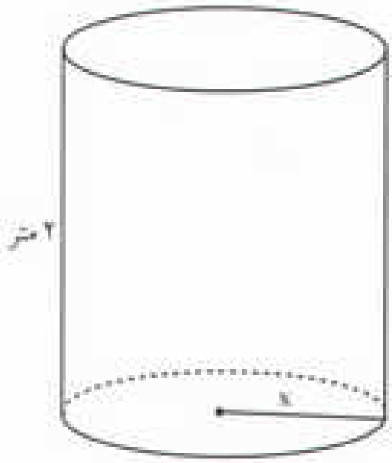
الف) اگر $S(x)$ مساحت این ورق باشد فرمول $S(x)$ را بنویسید.

ب) اگر $p(x)$ محیط این ورق باشد فرمول $p(x)$ را بنویسید.

پ) با توجه به این که x اندازه‌ی عرض یک مستطیل است، حدود تغییرات x را تعیین کنید.


شکل ۵۴ــ۱

۲) نرخ کرایه‌ی نوعی اتومبیل، برای هر کیلومتر طی مسافت، ۱۵۰ ریال، به اضافه‌ی ورودی ثابت ۴۰/۰۰۰ ریال است. کرایه‌ی اتومبیل تابعی از x، یعنی مسافت طی شده، برحسب کیلومتر، است. ضابطه‌ی این تابع را بنویسید (شکل۵۴ــ۱).



شکل ۵۵ــ۱

۳) می‌دانید که سطح جانبی و حجم استوانه به شعاع قاعده و ارتفاع آن بستگی دارد. فرض کنید ارتفاع استوانه‌ای ۲ متر و شعاع قاعده‌ی آن x متر باشد (شکل ۵۵ــ۱).

الف) اگر $S(x)$ سطح جانبی این استوانه باشد ضابطه‌ی $S(x)$ را بنویسید.

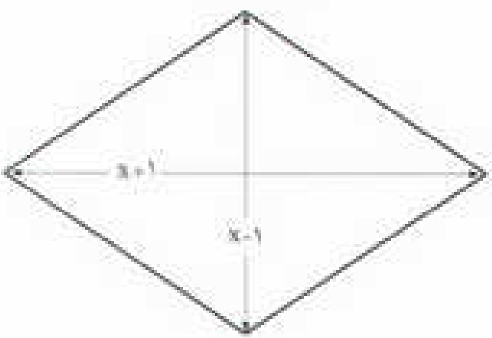
ب) اگر $V(x)$ حجم این استوانه باشد فرمول $V(x)$ را بنویسید.

۴) قطرهای یک لوزی به ترتیب $x+1$ و $x-1$ متر هستند (شکل ۵۶ــ۱).

الف) اگر $f(x)$ مساحت این لوزی باشد ضابطه‌ی $f(x)$ را بنویسید.

الف) با توجه به شکل روبه‌رو، حدود تغییرات x را تعیین کنید.

ب) نمودارتابع $y=f(x)$ را رسم کنید.



شکل ۵۶ــ۱

۲ــ۳ــ۱ــ تابع با جدول: می‌دانید که دمای بدن بیمار، با توجه به وضع روحی و جسمی او، به زمان بستگی دارد. جدول ۴ــ۱ دمای بدن بیماری را در ساعت‌های معین نشان می‌دهد.

آیا رابطه‌ای برای بیان دمای بدن (θ) این بیمار در لحظه‌های مختلف (t) وجود دارد؟ چرا؟ به عبارت دیگر، θ تابعی از t است. آیا این تابع ضابطه دارد؟

این مثال، نمونه‌ای از یک تابع است که با جدول مشخص شده و ضابطه ندارد (این تابع را با مثال فنر و وزنه مقایسه کنید).

جدول ۴ــ۱

t	۱۰	۱۲	۱۴	۱۶	۱۸	۲۰	۲۲
θ	۳۸/۵	۳۹	۳۹/۸	۳۹/۴	۳۹	۳۹/۸	۴۰

جدول ۵ــ۱ دمای هوای شهری را در ساعت‌های مختلف یک روز نشان می‌دهد.

جدول ۵ــ۱

t	۵	۷	۹	۱۱	۱۳	۱۴	۱۶	۱۸
θ	۱۲	۱۴	۲۲/۵	۲۸	۳۰/۵	۳۴/۵	۳۱	۲۷/۵

الف) آیا می‌توانید بگویید دمای هوای این شهر در ساعت ۲۰ یا ۲۳ چقدر بوده است؟

ب) آیا می‌توانید رابطه‌ی بین دما و زمان را با یک فرمول بیان کنید؟ چرا؟

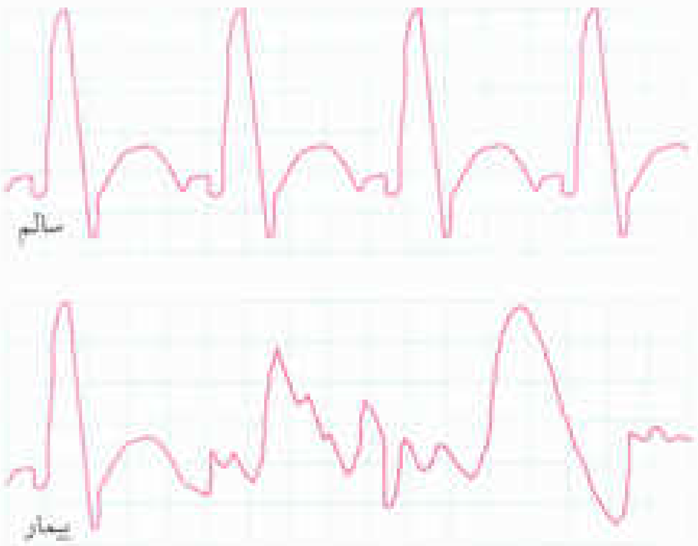
ج) آیا دمای این شهر در یک لحظه می‌تواند دو عدد متفاوت باشد؟

کار در کلاس ۶ــ۱

با راهنمایی دبیر خود به گروه‌های چندنفری تقسیم شوید و هر گروه با همفکری اعضای خود حداقل دو تابع که با جدول قابل بیان است پیدا کند. (ممکن است گروه‌های متفاوت تابع‌های یکسان به‌دست آورند.) چه نتیجه‌ای از این کار گروهی عاید شد؟

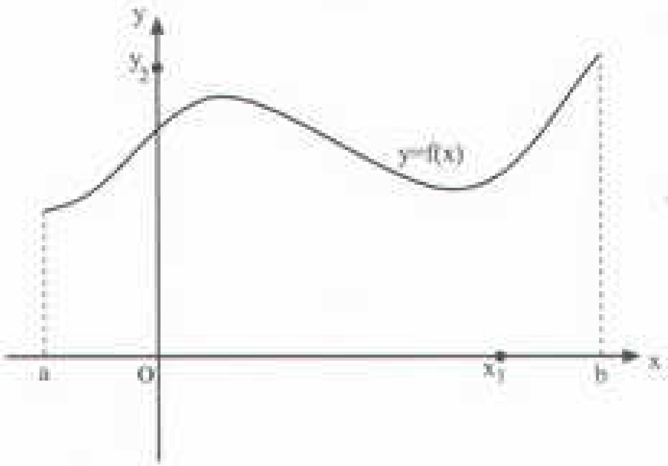
۳ــ۳ــ۱ــ تابع با نمودار: حتماً دیده‌اید که ادارات، وزارتخانه‌ها و نهادهای مختلف برای نشان دادن نتایج فعالیت‌های خود از نمودار استفاده می‌کنند. نمونه‌ای از تابع‌ها که با نمودار نشان داده می‌شوند، عبارت‌اند از :

نمودار مربوط به تولید گندم (برنج، سیب‌زمینی، نفت، گاز و ...) در مدتی معین. مثلاً، ضربان قلب تابعی از زمان است و پزشک از روی نمودار به سادگی می‌تواند قلب سالم و ناسالم را مشخص کند (شکل ۵۷ــ۱). این کار غالباً با نگاه به ضابطه‌ی تابع، عملی نیست!



شکل ۵۷ــ۱

در شکل ۵۸ــ۱ نمودار تابع $y = f(x)$ را ملاحظه می‌کنید.



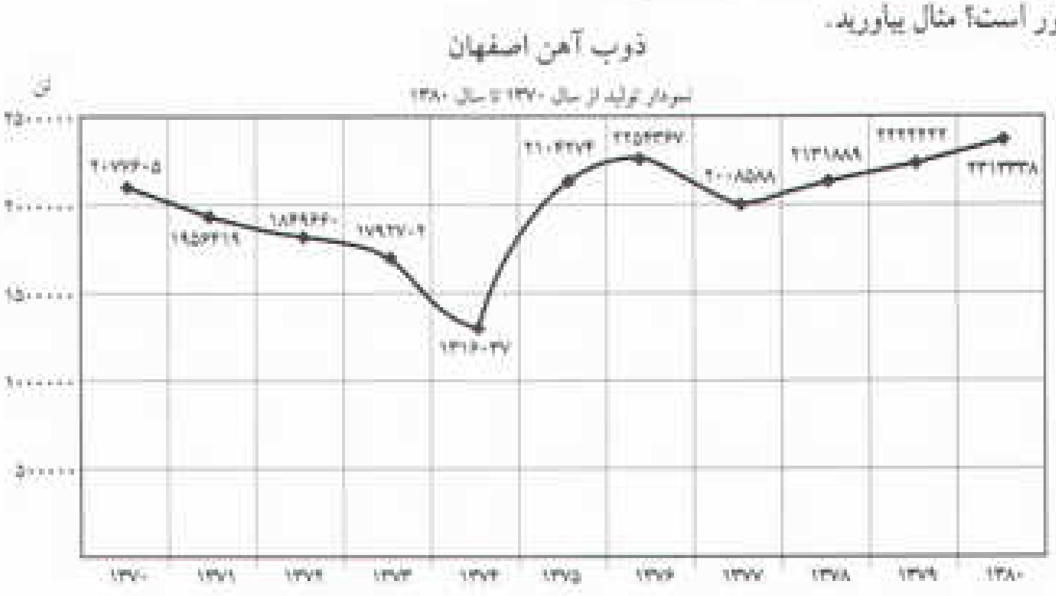
شکل ۵۸ــ۱

> ویژگی اصلی تابع، که نمودار آن نیز باید این ویژگی را داشته باشد، آن است که به ازای هر x از دامنه‌ی تابع فقط یک y حاصل شود. یعنی، هر خط موازی محور yها نمودار $y = f(x)$ را **حداکثر در یک نقطه** قطع کند.

آیا در مورد نمودار شکل ۵۸ــ۱ این ویژگی برقرار است؟
توضیح دهید که $f(x_1)$ چگونه به‌دست می‌آید.

نحوه‌ی به‌دست آوردن x_2 را، به‌طوری که $y_2 = f(x_2)$، شرح دهید.

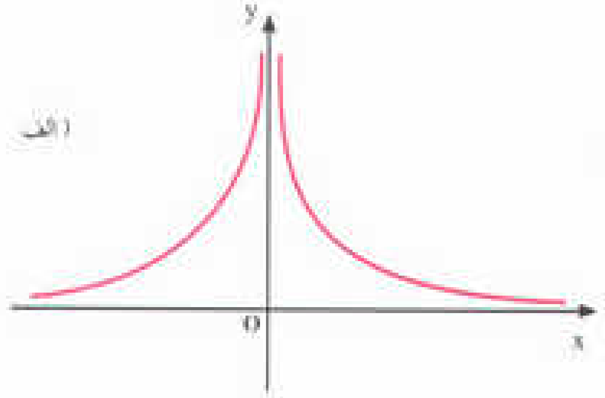
کمترین و بیشترین مقدار y در چه نقاطی اتفاق می‌افتد؟ آیا همیشه همین‌طور است؟ مثال بیاورید.

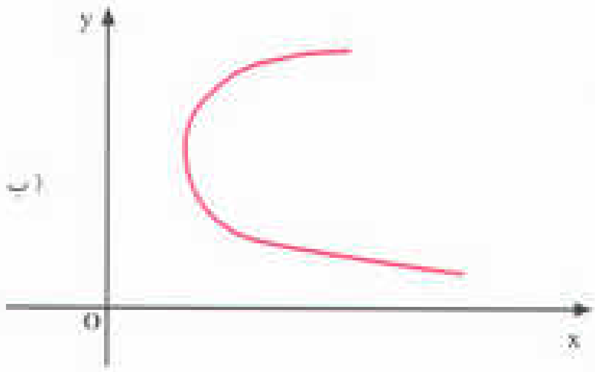


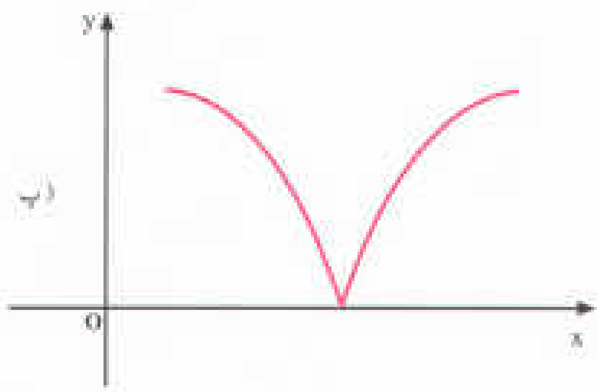
کار در کلاس ۷ـ۱

از نمودارهای مقابل، کدام معرف یک تابع است؟ توضیح دهید (شکل ۵۹ـ۱).

شما نیز چند نمودار که معرف تابع باشند رسم کنید.





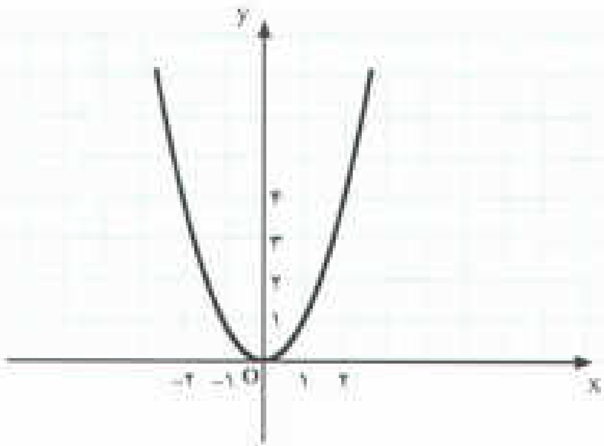


شکل ۵۹ـ۱

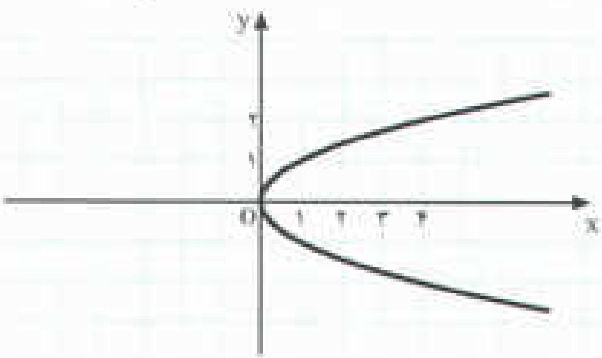
۴ـ۳ـ۱ـ تعریف تابع: اگر x و y چنان به هم مربوط باشند که برای هر مقدار x فقط یک مقدار برای y به‌دست آید، y را تابع x می‌نامیم. طبق این تعریف تنها مقدار متناظر با x را با f(x) نشان می‌دهند و این وابستگی را چنین می‌نویسند :

(بخوانید : y مساوی اف‌ِ ایکس است) $y = f(x)$

و منظور آن است که «y تابعی از x است». معمولاً x را متغیر مستقل و y را تابع x می‌نامند. باید توجه داشت که f(x) یک عبارت جبری است که مقدار y را به ازای هر x تعیین می‌کند. f(x) را **فرمول یا ضابطه‌ی** تابع نامند. از نماد f(x) معلوم می‌شود که متغیر، x و تابع، f است.



شکل ۶۰ـ۱ـ نمودار $y = x^2$. این نمودار یک تابع مشخص می‌کند.



شکل ۶۱ـ۱ـ نمودار $x = y^2$. این نمودار یک تابع مشخص نمی‌کند. چرا؟

نکته‌ی ۱: در مسائل مختلف ممکن است برحسب ضرورت متغیر x یا تابع y با نمادهای دیگری بیان شود. مثلاً، $h(t) = -\frac{۱}{۲}gt^۲$ که در آن t متغیر است و h تابع.

شکل ۶۲ــ۱

نکته‌ی ۲: همان‌طور که می‌دانید تابع‌های زیادی وجود دارند که دارای ضابطه نیستند. مثل تابع دمای هوا در لحظه‌های مختلف روز.

نکته‌ی ۳: همچنین می‌دانید که دستگاه‌هایی وجود دارند که با تغییر یک متغیر، نمودار تغییرات تابع را ثبت می‌کنند. برای چنین تابع‌هایی نیز ممکن است نتوانیم ضابطه‌ای تعیین کنیم (مثلاً دستگاه زلزله نگار) (شکل ۶۳ــ۱).


شکل ۶۳ــ۱

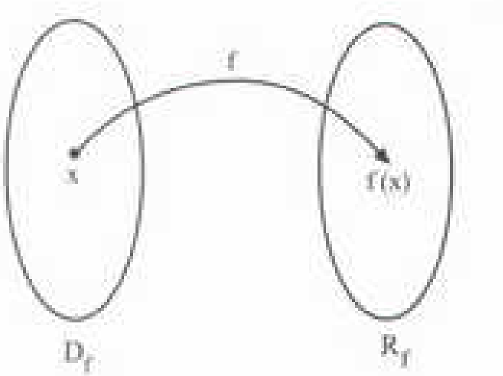
> در تابع f مجموعه‌ی مقادیر x را **دامنه‌ی تابع f** (D_f) و مجموعه‌ی مقادیر y را **برد تابع f** (R_f) می‌نامند.

در مثال فنر، دامنه و برد تابع مربوط به صورت زیر نمایش داده می‌شود.

$$D_f = \{۰,۰/۲,۰/۴,۰/۶,۰/۸,۰/۹,۱\}$$

$$R_f = \{۰/۱۰,۰/۱۱,۰/۱۲,۰/۱۳,۰/۱۴,۰/۱۵\}$$

در حقیقت f دستگاهی است که x را به‌عنوان **ورودی** دریافت می‌کند و f(x) را به‌عنوان **خروجی** تحویل می‌دهد (شکل ۶۴ــ۱).



شکل ۶۴ــ۱

به این ترتیب تابع f را می‌توان به صورت مجموعه‌ای از **زوج‌های مرتب**، یعنی، $(x, f(x))$ نشان داد.

در مثال فنر، تابع مربوط را می‌توان با مجموعه‌ی زوج‌های مرتب زیر نیز نمایش داد.

$$f = \{(۰,۰/۱۰),(۰/۲,۰/۱۱),(۰/۴,۰/۱۲),(۰/۶,۰/۱۳)$$
$$(۰/۸,۰/۱۴),(۰/۱,۰/۱۵)\}.$$

با توجه به آنچه گفته شد می‌توان نوشت:

$$f = \{(x, f(x)) : x \in D_f\},$$

$$R_f = \{f(x) : x \in D_f\}.$$

تابع‌ها را می‌توان به چهار شکل مختلف یعنی فرمول (ضابطه)، جدول، مجموعه‌ی زوج‌های مرتب و نمودار، نشان داد. در هر مورد از شکلی که مناسب‌تر است استفاده کنید و بدانید که هر چهار شکل نمایش تابع معتبر است.

در این کتاب با تابع‌هایی سروکار داریم که به ازای هر x از دامنه‌ی آن‌ها $f(x)$ عددی حقیقی است. به عبارت دیگر، $R_f \subseteq \mathbb{R}$. در این صورت تابع f را یک **تابع حقیقی** می‌گویند.

کار در کلاس ۸ــ۱

۱) فرض کنید، $f(x) = 6x - 2$ و $D_f = \{-1, -\frac{1}{2}, 0, 1, 2\}$.

الف) f را با جدول مشخص کنید: (جدول ۶ــ۱)

ب) R_f را بنویسید.

ج) f را به‌صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب بنویسید.

راهنمایی: $f(x)$ را به ازای xهای متعلق به D_f حساب کنید.

جدول ۶ــ۱

x	-1
$f(x)$	-8

$R_f = \{-8,$

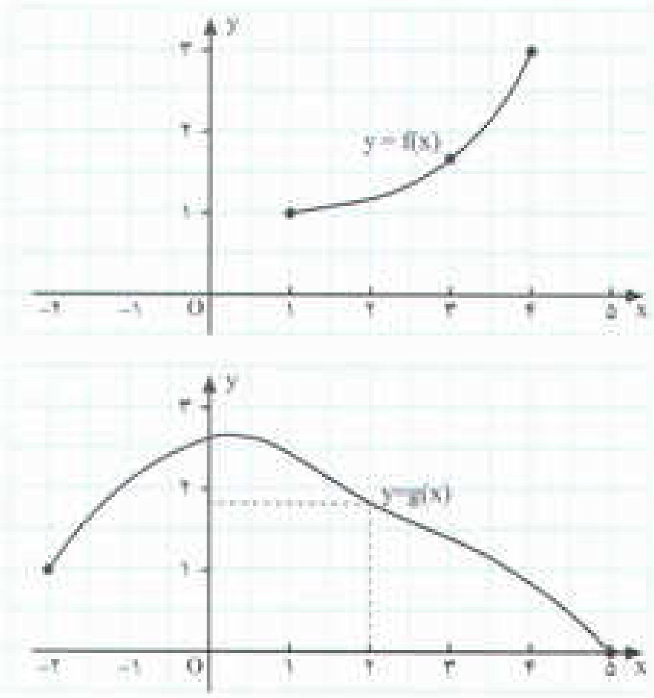
$f = \{(-1, -8),$

۲) اگر $f(t) = -5t^2 + 125$ و $D_f = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$، تابع f را با جدول و به‌صورت زوج‌های مرتب بنویسید.

۳) دامنه و برد تابع‌های f و g را بنویسید و مقدار تابع را در نقطه‌ای که مشخص شده، از روی شکل، معین کنید.

(الف)

(ب)



شکل ۶۵ــ۱

$D_f =$

$R_f =$

$f(3) =$

$D_g =$

$R_g =$

$g(2) =$

۴) تابع f با نمودار شکل ۶۶ــ۱ مشخص شده است.

الف) D_f و R_f را بنویسید.

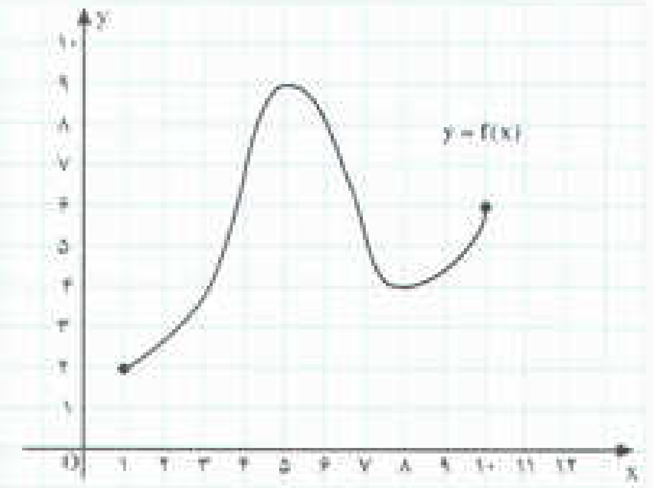
ب) با توجه به نمودار $f(1)$ و $f(5)$ را بنویسید.

پ) اگر $f(x) = 9$ مقدار x چیست؟

ت) اگر $f(x) = 4$ مقدار x چیست؟

ث) کمترین مقدار تابع در بازه‌ی $[1, 10]$ چیست؟

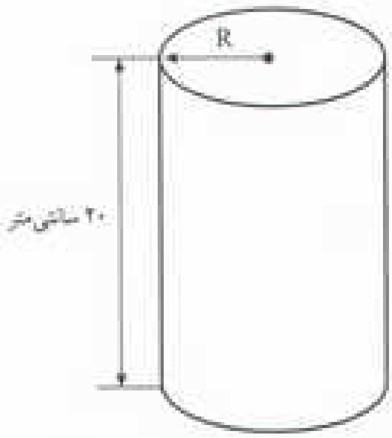
ج) بیشترین مقدار تابع در بازه‌ی $[1, 10]$ چیست؟



شکل ۶۶ــ۱

تمرین ۶ـ۱

۱) ارتفاع استوانه‌ای ۲۰ سانتی‌متر است($h = 20cm$) (شکل ۶۷ـ۱).
می‌دانید که حجم یک استوانه به ارتفاع h و شعاع قاعده‌ی R از رابطه‌ی $V = \pi R^2 h$ حساب می‌شود. اگر R بین ۸ تا ۱۲ سانتی‌متر تغییر کند حجم این استوانه بین چه مقادیری تغییر می‌کند؟



شکل ۶۷ـ۱

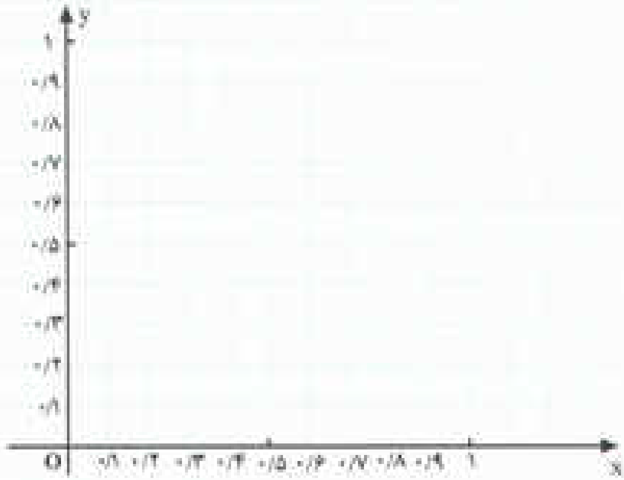
۲) فرض کنید $h(x) = x^2$ و $t(x) = x$ و دامنه‌ی هر دو تابع بازه‌ی $[0,1]$ باشند.

الف) نمودار این دو تابع را در یک دستگاه مختصات رسم کنید : (شکل ۶۸ـ۱)

ب) برد تابع h را تعیین کنید : $R_h =$

پ) برد تابع t چیست؟ $R_t =$

ت) آیا دو تابع h و t برابرند؟ چرا؟



شکل ۶۸ـ۱

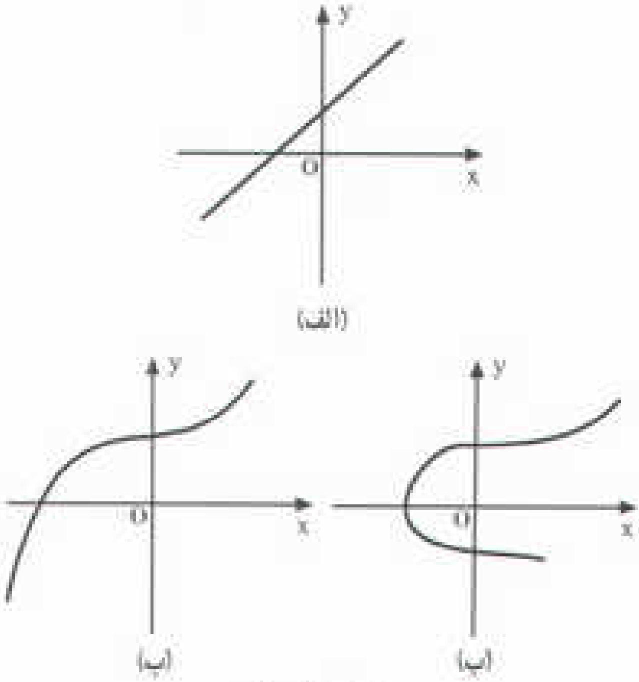
تساوی دو تابع: دو تابع وقتی با هم برابرند که دامنه‌ی یکسان داشته باشند و به ازای هر عضو از دامنه مقدار دو تابع برابر باشند.

۳) کدام نمودار مربوط به یک تابع است؟ توضیح دهید (شکل ۶۹ـ۱).

الف)

ب)

پ)



شکل ۶۹ـ۱

۴) نشان دهید که هیچ‌یک از رابطه‌های زیر، بین x و y، یک تابع مشخص نمی‌کنند.

الف) $x + y^2 = 4$

ب) $|y| = x + 1$

ج) $y^2 = x$.

۵) تابع $y = x^2 - 1$ مفروض است.

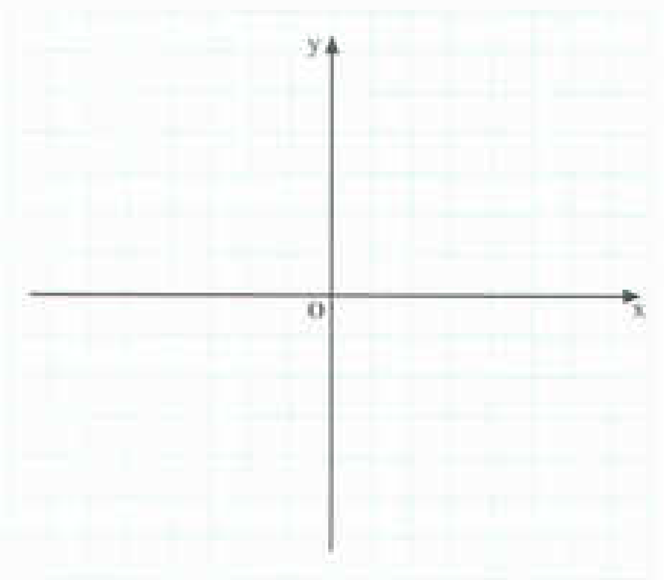
الف) نمودار این تابع را رسم کنید (شکل ۷۰ـ۱).

ب) آیا نقطه‌ی $A\left|\begin{matrix}3\\8\end{matrix}\right.$ روی نمودار این تابع است؟

پ) اگر نقطه‌ی $B\left|\begin{matrix}1\\b\end{matrix}\right.$ روی نمودار این تابع باشد b چیست؟

ت) عدد a را چنان تعیین کنید که نقطه‌ی $C\left|\begin{matrix}a\\-1\end{matrix}\right.$ روی نمودار تابع فوق باشد.

ث) آیا نقطه‌ی $D\left|\begin{matrix}\sqrt{3}\\1\end{matrix}\right.$ روی نمودار این تابع قرار دارد؟



شکل ۷۰ـ۱

۶) فرض کنید $f(x) = x^2 - 2x$. جدول ۷ـ۱ را کامل کنید و بعد نمودار $y = f(x)$ را در دفتر خود رسم کنید.

جدول ۷ـ۱

x	-۲	-۱	۰	۱	۲	۳
f(x)						

۷) تابع f به صورت زیر تعریف شده است. جدول ۸ـ۱ را کامل و سپس نمودار تابع را رسم کنید.

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x < 1 \\ x^2, & x \geq 1 \end{cases}$$

جدول ۸ـ۱

x	f(x)
-۱	
۰	
۱	
۲	
۳	

۸) در زیر چند تابع با ضابطه داده شده‌اند. مقدار آن‌ها را در نقاط مشخص شده حساب کنید.

الف) $f(x) = x^2 - x + \frac{1}{2}$ ، $x = 0, \frac{\pi}{2}$

ب) $g(x) = 3x^4 - x$ ، $x = -1, 1$

پ) $h(x) = \frac{x}{x^2+1}$ ، $x = -2, 0/5$

$f(0) =$ ، $f(\frac{\pi}{2}) =$

$g(-1) =$ ، $g(1) =$

$h(-2)$ ، $h(0/5) =$

۹) تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = x^2 - x$ تعریف شده است. مقادیر زیر را حساب کنید. (h عددی حقیقی است.)

$f(3)$ ، $f(3+h)$ ، $f(3+h) - f(3)$.

$f(3) =$

$f(3+h) =$

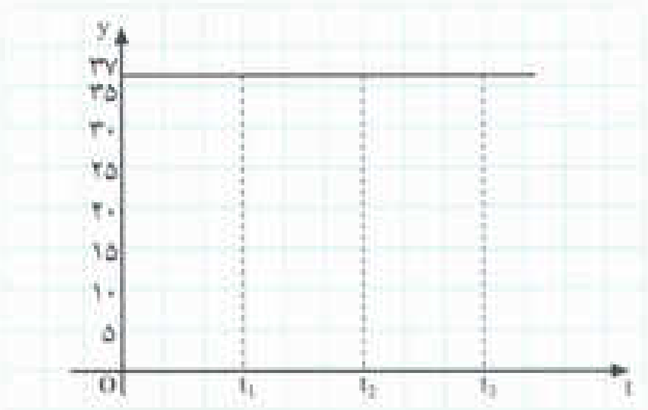
$f(3+h) - f(3) =$

۵ــ۳ــ۱ــ چند تابع ویژه

ــ **تابع ثابت:** دمای بدن یک انسان سالم همواره چند درجه‌ی سلسیوس(سانتی‌گراد) است؟ اگر $f(t)$ دمای بدن این شخص در زمان t باشد داریم:

$f(t) = 37$،

این تابع که به ازای هر t دارای مقدار ثابت ۳۷ است **تابع ثابت** نامیده می‌شود. نمودار این تابع را در شکل ۷۱ــ۱ ملاحظه می‌کنید.



شکل ۷۱ــ۱

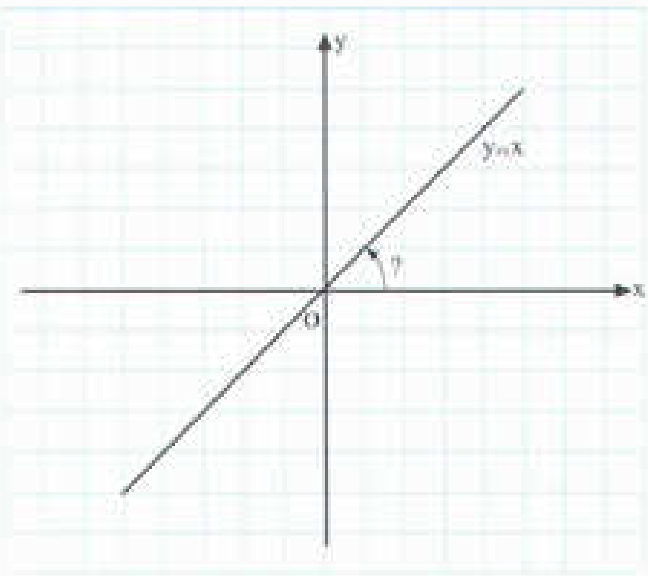
شما نیز چند تابع ثابت مثال بزنید و نمودار آن‌ها را رسم کنید.

> اگر به ازای هر x از دامنه‌ی تابع f،
> $f(x) = c$ که $c \in \mathbb{R}$ ، f را تابع ثابت گویند.

ــ **تابع همانی:** یک شیء در فاصله‌ی x جلوی آینه‌ای تخت قرار دارد. فاصله‌ی تصویر این شیء تا آینه چقدر است؟ (شکل ۷۲ــ۱). اگر $f(x)$ فاصله‌ی شیء تا آینه باشد.

$f(x) = x$

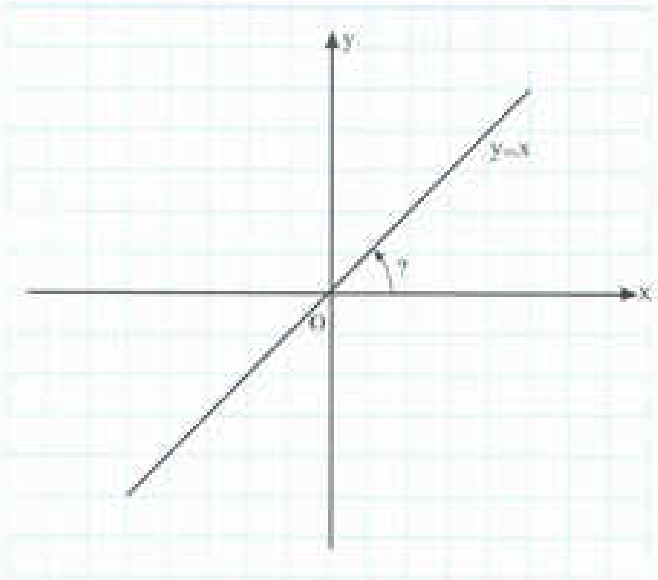
این نمونه‌ای از یک **تابع همانی** است.



شکل ۷۲ــ۱

> اگر به ازای هر x از دامنه‌ی x ، $f(x) = x$،
> f را تابع همانی گویند.

نمودار تابع همانی را در شکل ۷۳ــ۱ می‌بینید. زاویه‌ی نمودار تابع همانی با محور ox چند درجه است؟



شکل ۷۳ــ۱

> در حالت کلی، نمودار تابع همانی نیمساز ربع اول و سوم دستگاه مختصات است.

ــ تابع‌های پله‌ای:

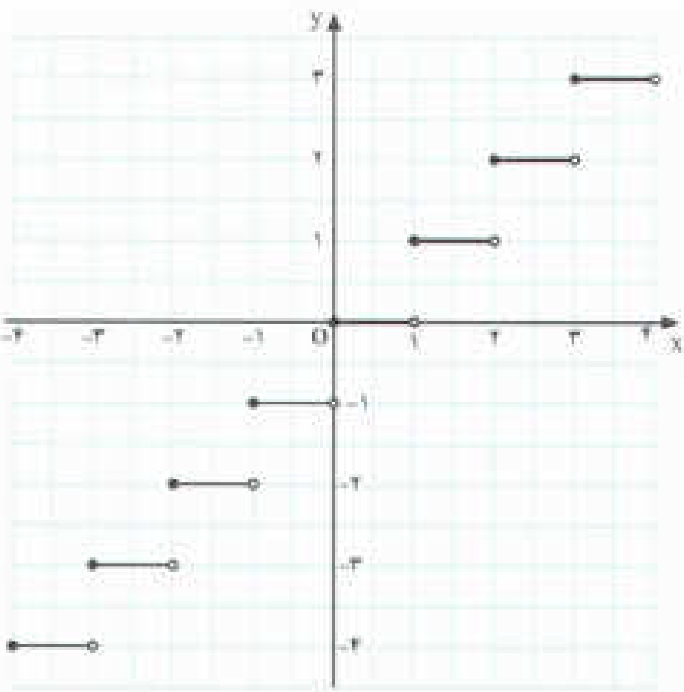
می‌دانید که اگر n عددی صحیح باشد و x عددی حقیقی، **جزء صحیح** x، که با [x] نمایش داده می‌شود، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$[x]=n \ , \ n\le x<n+1$$

به عبارت دیگر تابع جزء صحیح در هریک از بازه‌های $[-1,0)$، $[0,1)$، $[1,2)$ و ....، مقدار ثابت است. جزء صحیح x در نامساوی‌های زیر صدق می‌کند:

$$[x]\le x<[x]+1$$

قسمتی از نمودار این تابع را در شکل ۷۴ــ۱ ملاحظه می‌کنید.



شکل ۷۴ــ۱

فعالیت ۱۰ــ۱

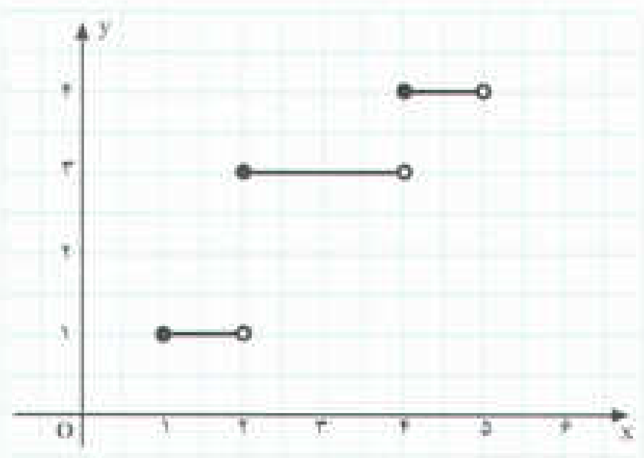
شکل ۷۵ــ۱ نمودار تابع $y=f(x)$ است. به این تابع، **تابع پله‌ای** می‌گویند.

الف) دامنه‌ی تابع f را بنویسید.

ب) آیا می‌توانید با توجه به این تابع، تعریفی برای یک تابع پله‌ای ارایه کنید؟

پ) ضابطه‌ی تابع را کامل کنید.

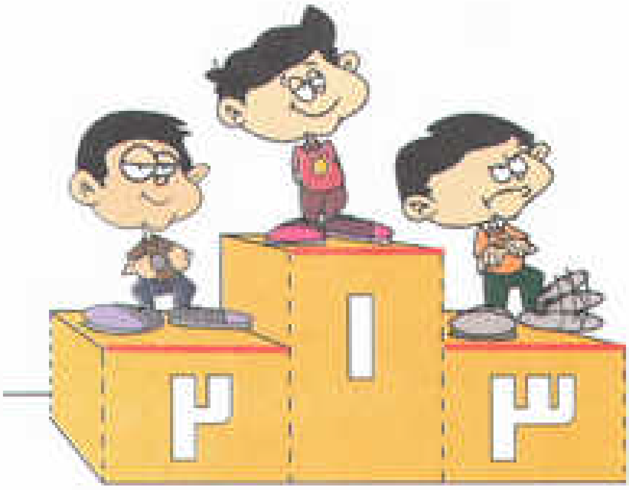
$$f(x)=\begin{cases} 1 & 1\le x<2 \\ ? & 2\le x<4 \\ 4 & 4\le x<5 \end{cases}$$



شکل ۷۵ــ۱ــ نمودار تابع $y=f(x)$

ت) این ضابطه با ضابطه‌هایی که تاکنون برای تابع‌ها نوشته‌ایم چه تفاوتی دارد؟

ث) طبق ضابطه‌ی تابع f، دامنه‌ی تابع به چند بازه تقسیم (افراز) شده است؟ آیا تابع بر هریک از این بازه‌ها یک تابع ثابت است؟ حال می‌توانید به سؤال (ب) جواب دهید؟



اهدای جایزه به قهرمانان

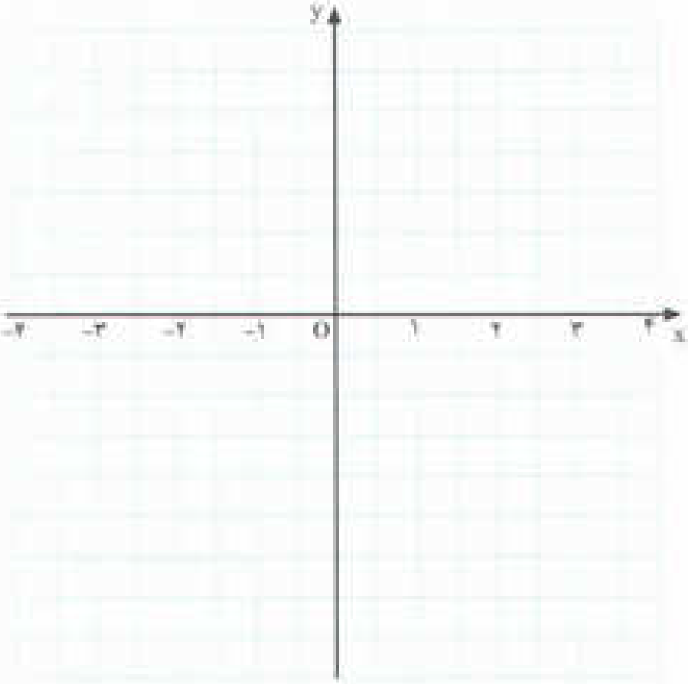
کار در کلاس ۹ـ۱

تابع f با ضابطه‌ی $y=[2x]$ را بر بازه‌ی $[-2,2]$ درنظر بگیرید.

۱) جدول ۹ـ۱ را کامل کنید.

جدول ۹ـ۱

x	f(x)
$x\in[-2,-\frac{3}{2})$	-4
$x\in[-\frac{3}{2},-1)$	
$x\in[-1,-\frac{1}{2})$	-2
$x\in[-\frac{1}{2},0)$	
$x\in[0,\frac{1}{2})$	
$x\in[\frac{1}{2},1)$	
$x\in[1,\frac{3}{2})$	
$x\in[\frac{3}{2},2)$	3
2	4



شکل ۷۶ـ۱

۲) نمودار تابع $y=[2x]$ را برای xهای داده شده در جدول ۹ـ۱ رسم کنید.

تمرین ۷ـ۱

۱) نمودار تابع f با ضابطه‌ی $y=[\frac{x}{2}]$ را در بازه‌ی $[-4,2]$ رسم کنید.

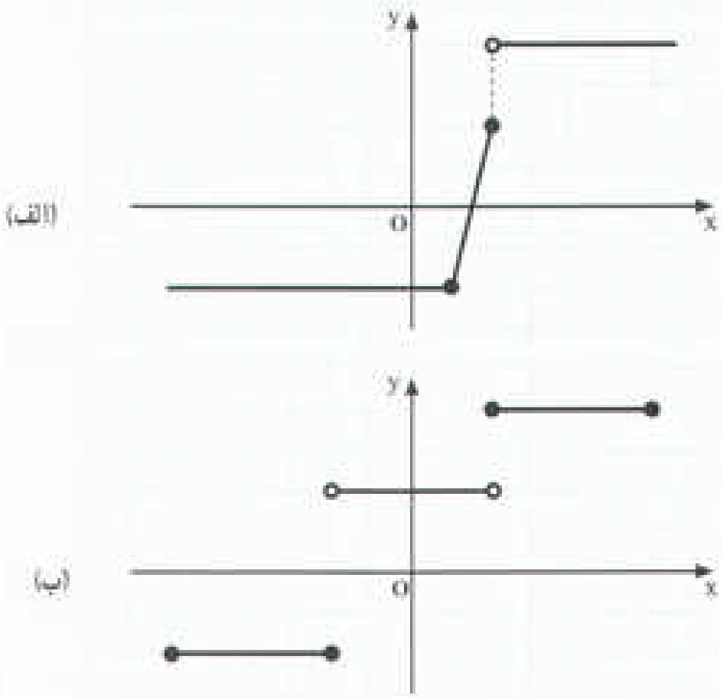
۲) نمودار تابع f با ضابطه‌ی $y=[x+2]$ را در بازه‌ی $[1,3]$ رسم کنید.

۳) نمودار تابع‌های f و g را، که در زیر تعریف شده‌اند، رسم کنید. آیا این تابع‌ها پله‌ای هستند؟

الف) $f(x)=\begin{cases} 1 & 0 \le x < 1 \\ 3 & 1 \le x < 2/5 \\ 5 & 2/5 \le x < 4 \end{cases}$

ب) $g(x)=[2x-1] \;,\; -2 \le x \le 2$

۴) از نمودارهای شکل ۷۷ـ۱، کدام نمودار یک تابع پله‌ای است؟



شکل ۷۷ـ۱

ــ تابع‌های مثلثاتی:

در شکل ۷۸ــ۱ دایره‌ی مثلثاتی رسم شده و زاویه‌ی α مشخص شده است.

الف) این دایره‌ی مثلثاتی چه ویژگی‌هایی دارد؟

ب) نقطه‌های مربوط به $\pi+\alpha$ و $2\pi+\alpha$ را روی این دایره مشخص کنید.

پ) مقدار $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ را به ترتیب، روی محور $y'oy$ و محور $x'ox$ مشخص کنید.

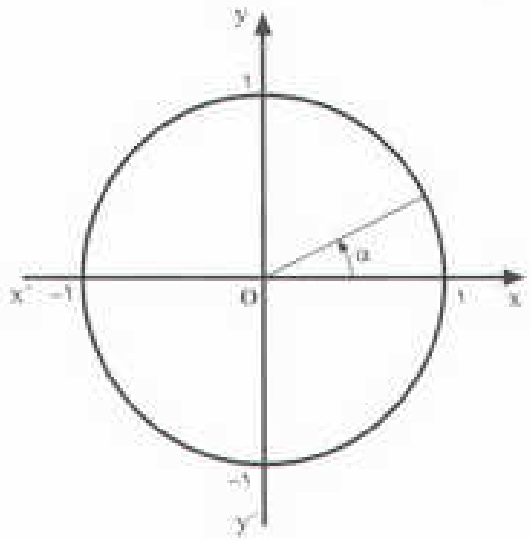
ت) وقتی α از ۰ تا $\frac{\pi}{2}$ (یعنی 90°) تغییر می‌کند $\sin\alpha$ چگونه تغییر می‌کند؟

ث) وقتی α از $\frac{\pi}{2}$ تا π (یعنی 180°) تغییر می‌کند $\sin\alpha$ چگونه تغییر می‌کند؟

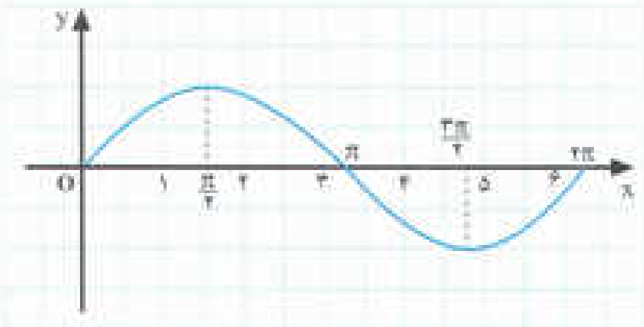
ج) وقتی α از ۰ تا 180° تغییر می‌کند $\cos\alpha$ چگونه تغییر می‌کند؟

چ) وقتی α از $\frac{\pi}{2}$ تا $\frac{3\pi}{2}$ (یعنی 270°) تغییر می‌کند $\sin\alpha$ چگونه تغییر می‌کند؟

ح) با توجه به آنچه در قسمت‌های قبل ملاحظه شد، نمودار تابع $y=\sin x$ و $y=\cos x$ در بازه‌ی $[0,2\pi]$ رسم شده‌اند(شکل‌های ۷۹ــ۱ و ۸۰ــ۱).

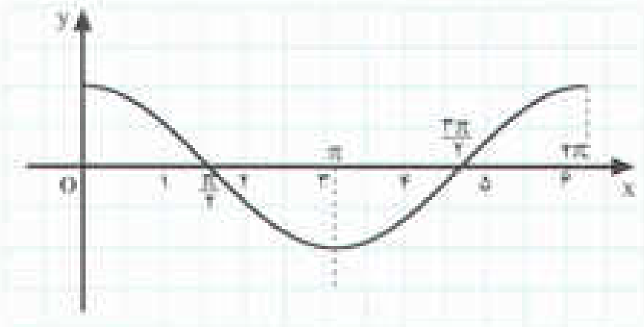


شکل ۷۸ــ۱



شکل ۷۹ــ۱ــ نمودار تابع $y=\sin x$

خ) با توجه به این که برای هر α، $\sin(\alpha+2\pi)=\sin\alpha$، نمودار $y=\sin x$ را در بازه‌ی $[2\pi,4\pi]$ رسم کنید.



شکل ۸۰ــ۱ــ نمودار تابع $y=\cos x$

د) با توجه به این که برای هر α، $\cos(\alpha+2\pi)=\cos\alpha$، نمودار $y=\cos x$ را در بازه‌ی $[2\pi,4\pi]$ رسم کنید.

تمرین ۸ـ۱

۱) نرخ تلگراف چنین است :

هر پنج کلمه یا کمتر ۱۰۰ تومان

اگر $f(x)$ هزینه‌ی تلگراف x کلمه باشد :

الف) جدول ۱۰ـ۱ را کامل کنید :

ب) دامنه‌ی تابع f چه مجموعه‌ای است؟

پ) رسم نمودار $y=f(x)$ را، وقتی $1\le x\le 12$، در دستگاه مختصات شکل ۸۱ـ۱ کامل کنید.

ت) تحقیق کنید آیا فرمول زیر ضابطه‌ی تابع f است؟

$$f(x)=100\left[\frac{x+4}{5}\right]$$

جدول ۱۰ـ۱

x	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۱۰	۱۱	۱۲
f(x)	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۲۰۰				۳۰۰

شکل ۸۱ـ۱

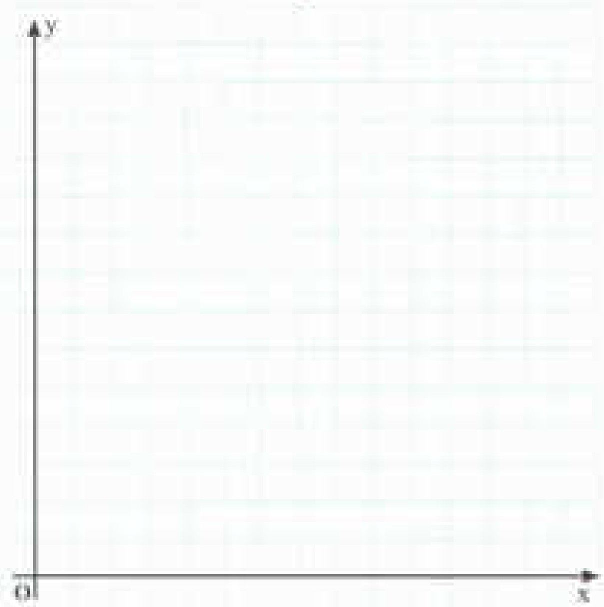
۲) تابع $y=f(x)$ چنین تعریف شده است :

$$f(x)=\begin{cases} x, & 0<x\le 5 \\ 2x, & 5<x\le 10 \\ 3x, & 10<x\le 15 \end{cases}$$

الف) دامنه‌ی این تابع را بنویسید :

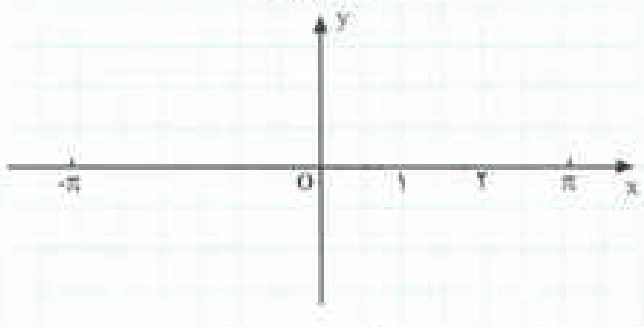
ب) نمودار این تابع را رسم کنید (شکل ۸۲ـ۱). آیا این تابع، یک تابع پله‌ای است؟

پ) آیا مثالی از یک تابع واقعی دارید که ضابطه‌ی آن مشابه ضابطه‌ی این تابع باشد؟



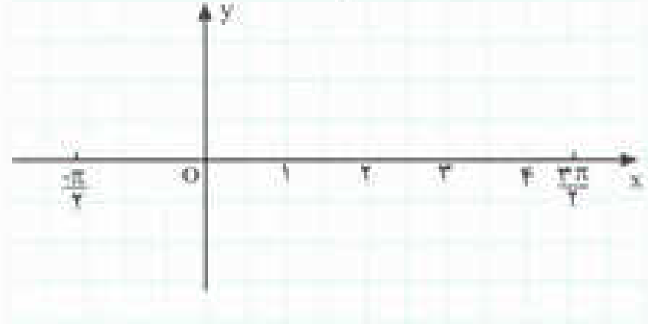
شکل ۸۲ـ۱

۳) نمودار تابع $y=\sin x$ را در بازه‌ی $[-\pi,\pi]$ رسم کنید (شکل ۸۳ـ۱).



شکل ۸۳ـ۱

۴) نمودار تابع $y=\cos x$ را در بازه‌ی $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ رسم کنید (شکل ۸۴ـ۱).



شکل ۸۴ـ۱

آزمون پایانی (۳)

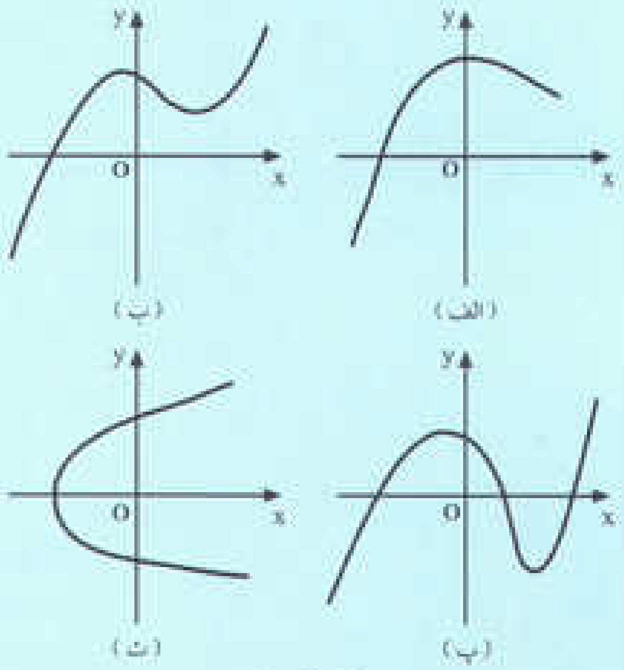
۱ـ تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=2x-1$ و $D_f=\{0,1,5\}$ است.

الف) این تابع را با مجموعه زوج‌های مرتب نمایش دهید.
ب) این تابع را با جدول نمایش دهید.
پ) نمودار این تابع را تعیین کنید.

۲ـ تابع مربوط به دمای محل سکونت خود را در ساعت‌های ۶، ۱۰، ۱۴، ۱۸ و ۲۲ مشخص کنید. آیا می‌توانید برای این تابع ضابطه به‌دست آورید؟

۳ـ کدام یک از نمودارهای شکل ۸۵ـ۱ یک تابع را مشخص می‌کند؟

محل پاسخ به سؤالات آزمون پایانی



شکل ۸۵ـ۱

بخش اول

فصل چهارم

دامنه‌ی تابع‌های حقیقی

هدف کلی

تعیین دامنه‌ی تابع‌هایی که برد آن‌ها زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی است.

هدف‌های رفتاری: انتظار می‌رود فراگیر پس از پایان این فصل بتواند :

۱ــ دامنه‌ی تابع‌های چندجمله‌ای را تعیین کند.

۲ــ دامنه‌ی تابع‌های رادیکالی را مشخص کند.

۳ــ دامنه‌ی تابع‌های کسری را تعیین کند.

۴ــ دامنه‌ی تابع‌های مربوط به مدل ریاضی مسائل را تعیین کند.

پیش‌آزمون (۴)

محل پاسخ به سؤالات پیش‌آزمون

۱ــ عبارت‌های زیر را تعیین علامت کنید.

الف) $۲x-۵$

ب) $-۳x+۶$

پ) $(x-۲)(۳+x)$

ت) $x^۲-۴$

ث) $-x^۲-۲x+۳$

ج) $x^۲+x+۱$

چ) $\frac{x+۱}{x-۳}$

ح) $\frac{x^۲+۱}{x^۲-x-۲}$

۲ــ نامعادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $-۲x+۳>۰$

ب) $x^۲-x-۲>۰$

پ) $\frac{x+۲}{x+۱}<۰$

ت) $\frac{x}{x-۱}<۲$

ث) $x^۲-۴<۰$

۳ــ هریک از عبارت‌های زیر به ازای چه مقدارهایی از x معین (تعریف شده) می‌باشند؟

الف) $\frac{۱}{x-۲}$

ب) $\sqrt{۲-x}$

پ) $\frac{۲}{x^۲-x-۲}$

ت) $\sqrt{x^۲-x-۶}$

۴ــ دامنه‌ی هریک از تابع‌های زیر را تعیین کنید.

الف) $f(x)=\frac{۱}{x-۱}$

ب) $g(x)=\sqrt{۴-x^۲}$

پ) $h(x)=\sqrt{\frac{x-۱}{x+۲}}$

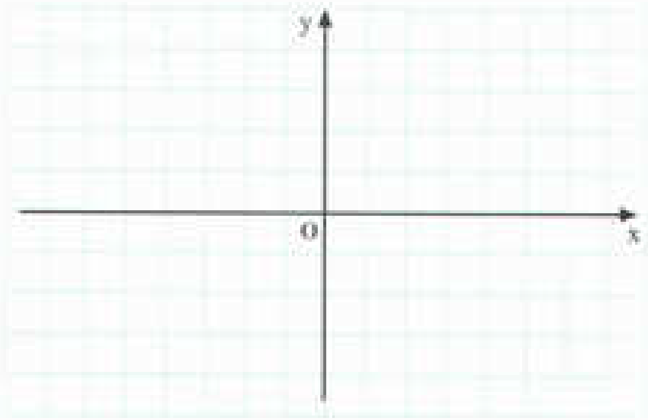
۴ــ۱ــ دامنه‌ی تابع‌های حقیقی

اگر دامنه‌ی یک تابع حقیقی، مثلاً تابع f ، مشخص نشده باشد، دامنه‌ی f مجموعه‌ی تمام عددهای حقیقی x است که به ازای آن‌ها f(x) تعریف شده حقیقی است. معمولاً اگر f یک تابع حقیقی باشد می‌نویسند :

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$

$$x\to f(x)$$

در این قسمت در مورد پیدا کردن دامنه‌ی تابع‌های حقیقی مطالبی را با هم بررسی می‌کنیم.



شکل ۸۶ــ۱

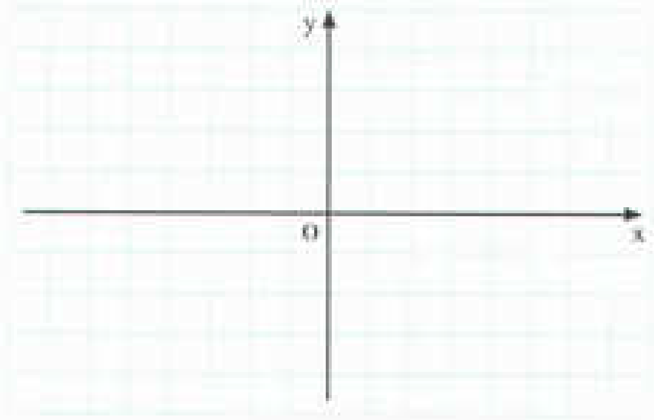
فعالیت ۱۲ــ۱

فرض کنید $f(x)=۲x+۱$

۱) نمودار $y=f(x)$ را رسم کنید (شکل ۸۶ــ۱).

۲) دامنه‌ی این تابع را بنویسید.

۳) اگر $g(x)=x^۲-۱$ ، نمودار $y=g(x)$ را رسم کنید و دامنه‌ی تابع g را بنویسید (شکل ۸۷ــ۱).



شکل ۸۷ــ۱

۴) اگر تابع p با ضابطه‌ی زیر تعریف شود (یعنی p یک تابع چندجمله‌ای درجه‌ی n باشد) :

$$p(x)=a_nx^n+a_{n-۱}x^{n-۱}+\cdots+a_۰$$

دامنه‌ی p را بنویسید.

دامنه‌ی هر تابع چند جمله‌ای، مجموعه‌ی تمام اعداد حقیقی، $\mathbb{R}$ ، است.

کار در کلاس ۱۰ــ۱

محل پاسخ به سؤالات کار در کلاس

الف) فرض کنید

$$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \to \frac{1}{2x-1}$$

۱) تابع g به ازای چه مقداری از x تعریف نشده است؟

۲) دامنه‌ی تابع g را بنویسید.

۳) اگر $g(x)=\frac{1}{x^2+5x+6}$، معین کنید عبارت x^2+5x+6 به ازای چه مقادیری از x صفر می‌شود، سپس دامنه‌ی g را بنویسید.

۴) اگر p(x) یک چندجمله‌ای از درجه‌ی n باشد و $A=\{x\in\mathbb{R}|p(x)=0\}$ دامنه‌ی تابع $g(x)=\frac{1}{p(x)}$ را بنویسید.

ب) فرض کنید $f(x)=\sqrt{x(3x+2)}$.

۱) عبارت $x(3x+2)$ را تعیین علامت کنید.

۲) دامنه‌ی تابع f را بنویسید.

پ) فرض کنید $f(x)=\sqrt[3]{x^2-x}$.

۱) آیا f(x) به ازای هر عدد حقیقی x تعریف شده است؟

۲) دامنه‌ی تابع f را بنویسید.

ت) دامنه‌ی هریک از تابع‌های زیر را بنویسید.

۱) $f(x)=\sin x$

۲) $f(x)=\cos x$

۳) $f(x)=[x]$

۴) $f(x)=\sin x-\cos x$

ث) فرض کنید

$$f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \to \frac{1}{\sqrt{x^2+5x+6}}$$

۱) عبارت x^2+5x+6 به ازای چه مقادیری از x صفر می‌شود؟

۲) عبارت x^2+5x+6 به ازای چه مقادیری از x مثبت است؟

۳) دامنه‌ی تابع f را تعیین کنید.

ج) فرض کنید $h:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ و $h(x)=\frac{x-1}{x^2-1}$

۱) دامنه‌ی تابع h را تعیین کنید.

۲) دانش‌آموزی برای تعیین دامنه‌ی h چنین عمل کرده است:

$$h(x)=\frac{x-1}{x^2-1}=\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}$$

$$=\frac{1}{x+1}$$

با توجه به این که اگر $x+1=0$ آنگاه $x=-1$ پس دامنه‌ی تابع h برابر است با $\mathbb{R}-\{-1\}$. آیا استدلال این دانش‌آموز درست است؟ چرا؟

چ) فرض کنید

$$f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \to \tan x$$

۱) با توجه به این که $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$، دامنه‌ی این تابع را تعیین کنید.

۲) با روشی مشابه دامنه‌ی تابع $y=\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$ را تعیین کنید.

محل پاسخ به سؤالات کار در کلاس

۱ــ۴ــ۱ــ مثال‌های حل شده

۱ــ دامنه‌ی تابع $f(x)=\frac{۲}{x^۲-۴}$ را تعیین کنید.

حل ۱: مقدار xهایی که مخرج کسر را صفر می‌کند تعیین می‌کنیم.

$$x^۲-۴=۰ \Rightarrow x^۲=۴ \Rightarrow x=۲ \quad \text{یا} \quad x=-۲$$

بنابراین،

$$D_f=\mathbb{R}-\{-۲,۲\}.$$

۲ــ دامنه‌ی تابع $g(x)=\sqrt{\frac{x-۱}{x+۲}}$ را تعیین کنید.

حل ۲: عبارت زیر رادیکال نباید منفی باشد، ضمناً مخرج کسر زیر رادیکال نیز نباید صفر باشد.

$$x+۲=۰ \Rightarrow x=-۲$$

$$x-۱=۰ \Rightarrow x=۱$$

جدول ۱۱ــ۱

x	$-\infty$		-۲		۱		$+\infty$
$\frac{x-۱}{x+۲}$		+	تعریف نشده	−	۰	+	

$$D_g=(-\infty,-۲)\bigcup[۱,+\infty)$$

۳ــ دامنه‌ی تابع $h(x)=\frac{x+۳}{x^۲-۹}$ را تعیین کنید.

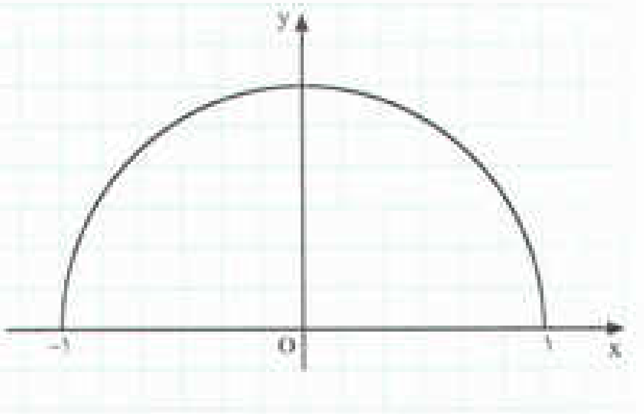
حل ۳: مقدارهایی از x را که مخرج کسر را صفر می‌کنند به‌دست می‌آوریم.

$$x^۲-۹=۰ \Rightarrow x=۳ \quad \text{یا} \quad x=-۳$$

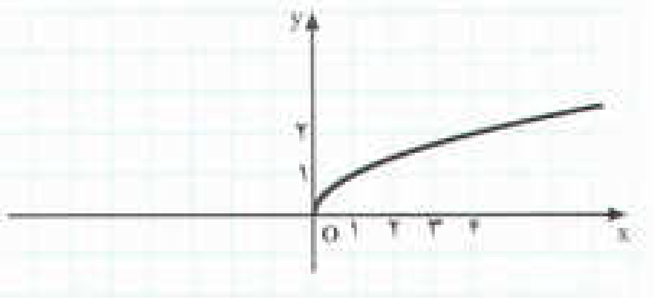
بنابراین،

$$D_h=\mathbb{R}-\{-۳,۳\}.$$

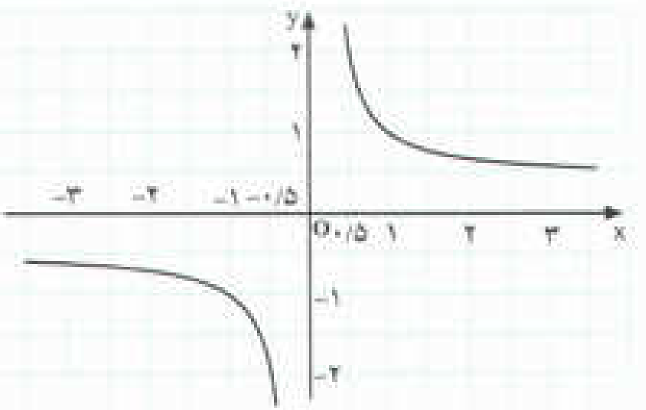
۴ــ در زیر نمودار چند تابع رسم شده است و دامنه‌ی آنها نیز نوشته شده است.



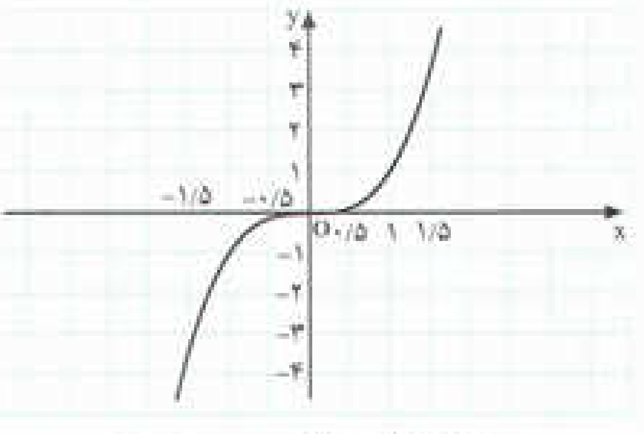
شکل ۸۸ــ۱ــ نمودار $f(x)=\sqrt{۱-x^۲}$ ، $D_f=[-۱,۱]$



شکل ۸۹ــ۱ــ نمودار $f(x)=\sqrt{x}$ ، $D_f=[۰,\infty)$



شکل ۹۰ــ۱ــ نمودار $f(x)=\frac{۱}{x}$ ، $D_f=\mathbb{R}-\{۰\}$



شکل ۹۱ــ۱ــ نمودار $f(x)=x^۳$ ، $D_f=\mathbb{R}$

تمرین ۹ــ۱

۱) دامنه‌ی تابع‌های زیر را تعیین کنید.

الف) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to \frac{۲x+۱}{x^۲-۴}$ ... ب) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to \sqrt{۲x-x^۲}$

الف) $D_f =$ ... ب) $D_g =$

پ) $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to \frac{x+۲}{x^۲+۲x+۱}$ ... ت) $k: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to \sqrt{\frac{۱}{x-۱}}$

پ) $D_h =$ ... ت) $D_k =$

۲) تابع f با ضابطه‌ی زیر تعریف شده است.

$$f(x) = ۲^x$$

الف) جدول ۱۲ــ۱ را کامل کنید.

ب) با توجه به جدول ۱۲ــ۱ نمودار تابع f را در دفتر خود رسم کنید.

جدول ۱۲ــ۱

x	-۱	۰	۱	۲	۳	۴
f(x)						

پ) با توجه به نموداری که رسم کردید تقریبی از $۲^{\sqrt{۲}}$ به‌دست آورید.

ت) با توجه به نمودار، x را چنان تعیین کنید که $۲^x = ۳$.

ث) دامنه‌ی این تابع را مشخص کنید.

۳) دامنه‌ی تابع‌های زیر را تعیین کنید.

الف) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to \frac{۱}{x^۲+۱}$ ... ب) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to \frac{x-۱}{x^۲+۱}$

الف) $D_f =$ ... ب) $D_g =$

پ) $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to \sqrt{\frac{x}{x-۱}}$ ... ت) $k: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to \sqrt{\frac{x}{x^۲+۱}}$

پ) $D_h =$ ... ت) $D_k =$

۴) فرض کنید $f(x) = x - \sin x$ و $g(x) = \cos x + x$. دامنه‌ی این تابع‌ها را تعیین کنید، سپس مقادیر زیر را حساب کنید.

الف) $f(۰) + g(۰) =$

ب) $f(\frac{\pi}{۲}) + g(\frac{\pi}{۲}) =$

پ) $f(\frac{\pi}{۴}) - g(\frac{\pi}{۴}) =$

ت) $f(۱) + g(۱) =$

توجه: در تمرین بالا x باید رادیان درنظر گرفته شود. هنگام استفاده از ماشین حساب به این مطلب توجه کنید. ضمناً، عدد π را تقریباً ۳/۱۴ منظور کنید.

آزمون پایانی (۴)

محل پاسخ به سؤالات آزمون پایانی

۱ــ دامنه‌ی هریک از تابع‌های زیر را تعیین کنید.

الف) $f(x)=2x^2-5x+1$

ب) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{2x-1}$

پ) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-x-2}$

ت) $f(x)=\sqrt{(x-3)(x+1)}$

ث) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2}{x-1}}$

ج) $f(x)=\tan x$

چ) $f(x)=\sin 2x$

ح) $f(x)=\left[\dfrac{x}{2}\right]$

۲ــ تابع f با جدول ۱۳ــ۱ مشخص شده است :

جدول ۱۳ــ۱

x	-۱	۰	۱	۲	۳	۴	۵
f(x)	۴	۳	۰	-۳	۵	۷	-۱

الف) این تابع را به‌صورت زوج‌های مرتب بنویسید.

ب) دامنه و برد این تابع را مشخص کنید.

بخش اول

فصل پنجم

عملیات روی تابع‌ها

هدف کلی

تعیین ضابطه‌ی $f \pm g$ ، $f.g$ و $\frac{f}{g}$ با داشتن ضابطه‌ی تابع‌های f و g و کاربرد آن‌ها

هدف‌های رفتاری: انتظار می‌رود فراگیر پس از پایان این فصل بتواند :

۱ــ چهار عمل اصلی روی دو تابع را تعریف کند.

۲ــ با داشتن ضابطه‌ی تابع‌های f و g ، ضابطه‌ی تابع‌های $f \pm g$ ، $f.g$ و $\frac{f}{g}$ را بنویسد.

۳ــ دامنه‌ی تابع‌های $f \pm g$ ، $f.g$ و $\frac{f}{g}$ را تعیین کند.

۴ــ از اعمال بر تابع‌ها در موارد کاربردی استفاده کند.

پیش‌آزمون (۵)

۱ـ اگر $f(x)=۲x$ و دامنه‌ی f مجموعه $\{۲,۳,۴,۵,۶\}$ باشد، حاصل عبارت‌های زیر را حساب کنید :

الف) $f(۲)\times f(۳)$

ب) $f(۲)+f(۳)$

پ) آیا تساوی $f(۲)\times f(۳)=f(۶)$ درست است؟

۲ـ اگر $f(x)=x^۲+x-۲$ و $g(x)=۲-۲x$ ، حاصل عبارت‌های زیر را حساب کنید :

الف) $f(۲)+g(۲)$

ب) $f(۲)-g(۲)$

پ) $f(۲)\times g(۲)$

ت) $\frac{f(۲)}{g(۲)}$

۳ـ دو تابع f و g با ضابطه‌های $f(x)=۵-۳x$ و $g(x)=۲x+۶$ داده شده‌اند. مطلوب است محاسبه عبارت‌های زیر :

الف) $f(۴)+g(۴)$

ب) $f(x)+g(x)$

پ) $f(۲)-g(۲)$

ت) $f(x)-g(x)$

ث) $f(\frac{۱}{۲})\times g(\frac{۱}{۲})$

ج) $f(x)\times g(x)$

چ) $\frac{f(۳)}{g(۳)}$

ح) $\frac{f(۳)}{g(۳)}$

۴ـ اگر $f(x)=۴x^۲-x+۳$ و $g(x)=+x^۲+x-۱$ ضابطه و دامنه‌ی تابع‌های زیر را تعیین کنید.

الف) $f+g$

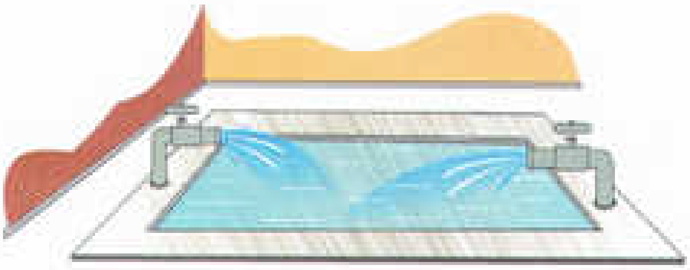
ب) $f-g$

پ) $f.g$

ت) $\frac{f}{g}$

محل پاسخ به سؤالات پیش‌آزمون

۵ــ۱ــ عملیات روی تابع‌ها



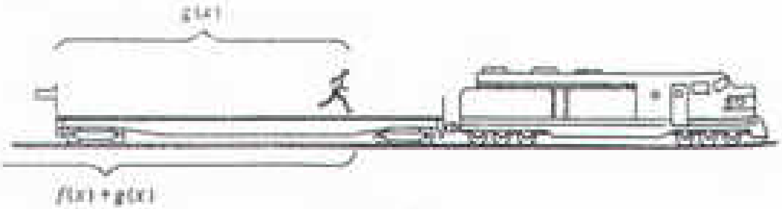
شکل ۹۲ــ۱

اگر f و g دو تابع حقیقی باشند به‌ازای هر x از دامنه‌ی مشترک آنها f(x) و g(x) دو عدد حقیقی هستند. بنابراین، می‌توان روی آنها چهار عمل اصلی را انجام داد.

۱) یک استخر دارای دو شیر آب است (شکل ۹۲ــ۱). شیر اول در هر ثانیه ۲ لیتر و شیر دوم در هر ثانیه ۳ لیتر آب وارد استخر می‌کند. اگر این دو شیر با هم آب وارد استخر کنند در هر ثانیه چند لیتر آب وارد استخر می‌شود؟

اگر f(t) مقدار آب وارد شده در t ثانیه، از شیر اول (برحسب لیتر) و g(t) مقدار آب وارد شده در t ثانیه، از شیر دوم باشند، پس از t ثانیه $f(t)+g(t)$ لیتر آب وارد استخر می‌شود. بنابر آنچه گفته شد: لیتر $f(t)=۲t$، لیتر $g(t)=۳t$ پس، توسط دو شیر، در ثانیه‌ی tام، لیتر $f(t)+g(t)=۲t+۳t=۵t$ آب وارد استخر می‌شود.

۲) شخصی، مطابق شکل ۹۳ــ۱، روی واگن کفی یک قطار می‌دود و در هر ثانیه به‌طور متوسط ۵/۵ متر طی می‌کند. اگر قطار در هر ساعت به‌طور متوسط ۹۰ کیلومتر (در هر ثانیه ۲۵ متر) طی کند، این شخص در هر ثانیه چند متر از مبدأ حرکت قطار دور می‌شود؟



شکل ۹۳ــ۱

مطابق شکل ۹۳ــ۱، واضح است که $g(x)=۵/۵x$ و $f(x)=۲۵x$. بنابراین، این شخص در هر ثانیه به اندازه‌ی ۳۰/۵ متر از مبدأ حرکت قطار دور می‌شود ($f(۱)+g(۱)=۲۵+۵/۵=۳۰/۵$).

اگر h(x) فاصله‌ی این شخص تا مبدأ پس از x ثانیه باشد، داریم:

$$h(x)=f(x)+g(x)=۲۵x+۵/۵x=۳۰/۵x$$

تابع h را مجموع دو تابع f و g می‌گویند و می‌نویسند:

$h = f + g$

زیرا، برای هر x، $h(x) = f(x) + g(x)$.

تابع $f + g$ به‌ازای هر x از دامنه‌ی مشترک f و g، یعنی $D_f \cap D_g$، با ضابطه‌ی $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ تعریف می‌شود.

مثال‌های حل شده در مورد مجموع، تفاضل و ضرب دو تابع.

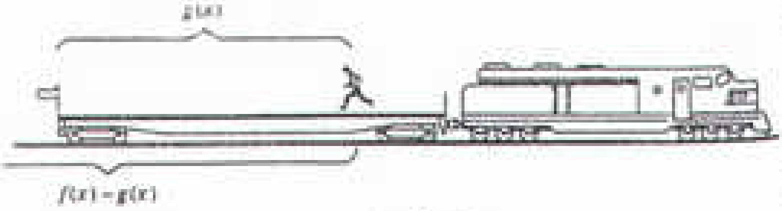
اگر $f(x) = x^2 - 2x$ و $g(x) = 2x + 1$ آنگاه، اگر $h = f + g$ داریم:

$$h(x) = f(x) + g(x) = (x^2 - 2x) + (2x + 1)$$
$$= x^2 + 1$$

اگر این شخص خلاف جهت حرکت قطار بدود، در هر ثانیه چقدر از مبدأ دور می‌شود؟ (شکل ۹۴ـ۱)

$f(1) - g(1) = 25 - 5/5 = 19/5$ متر

اگر d(x) فاصله این شخص تا مبدأ پس از x ثانیه باشد داریم:



شکل ۹۴ـ۱

$d(x) = f(x) - g(x)$

تابع d را با $f - g$ نشان می‌دهند.

تابع $f - g$ به‌ازای هر x از دامنه‌ی مشترک f و g، یعنی $D_f \cap D_g$، با ضابطه‌ی $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$ تعریف می‌شود.

اگر $f(x) = 2x^2 + 5x - 3$ و $g(x) = 2x^2 - x + 2$ ضابطه‌ی تابع $h = f - g$ را بنویسید.

حل: با توجه به تعریف داریم:

$$h(x) = f(x) - g(x)$$
$$= (2x^2 + 5x - 3) - (2x^2 - x + 2) = 6x - 5$$

به همین ترتیب می‌توان حاصل‌ضرب دو تابع f و g را نیز تعریف کرد.

تابع $f \times g$ به‌ازای هر x از دامنه‌ی مشترک f و g، یعنی $D_f \cap D_g$، با ضابطه‌ی $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$ تعریف می‌شود.

فرض کنید $f(x) = x + 1$ اندازه‌ی عرض یک مستطیل و $g(x) = 2x + 3$ اندازه‌ی طول این مستطیل باشند. اگر مساحت این مستطیل را با s(x) نمایش دهیم، ضابطه‌ی s(x) را بنویسید.

حل: واضح است که

$$s(x) = f(x) \times g(x) = (x + 1)(2x + 3)$$

بنابراین،

$$s(x) = 2x^2 + 5x + 3$$

در حقیقت، $s = f \times g$.

تابع $\frac{f}{g}$ را نیز، برای تمام xهایی که $g(x)\neq ۰$، می‌توان تعریف کرد.

در حقیقت،

$$D_{\frac{f}{g}}=\left(D_f\cap D_g\right)-\{x : g(x)=۰\}$$

> تابع $\frac{f}{g}$ به‌ازای هر x از دامنه‌ی مشترک f و g که $g(x)\neq ۰$، با ضابطه‌ی $(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ تعریف می‌شود.

اگر $f(x)=x^۲+۱$ و $g(x)=۳x-۲$، ضابطه‌ی تابع $\frac{f}{g}$ را بنویسید و $(\frac{f}{g})(\frac{۵}{۳})$ را تعیین کنید.

حل: با توجه به تعریف $\frac{f}{g}$ داریم:

$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x^۲+۱}{۳x-۲}\quad (x\neq\frac{۲}{۳})$$

$$\frac{f}{g}(\frac{۵}{۳})=\frac{(\frac{۵}{۳})^۲+۱}{۳(\frac{۵}{۳})-۲}=\frac{\frac{۲۵}{۹}+۱}{۵-۲}=\frac{۳۴}{۲۷}$$

تمرین ۱۰ــ۱

۱ــ فرض کنید $f(x)=x^۲-۱$ و $g(x)=x+۱$.

الف) ضابطه و دامنه‌ی تابع‌های $f+g$ ، $f-g$ و $f\times g$ را بنویسید.

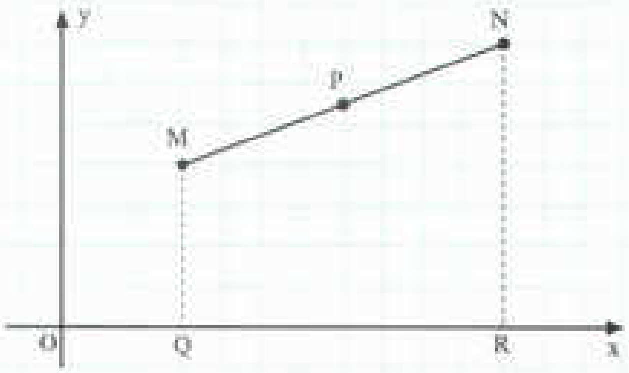
ب) مقدارهای $(f+g)(۰)$ ، $(f-g)(۱)$ ، $(f\times g)(۲)$ و $(\frac{f}{g})(۴)$ را حساب کنید.

۲ــ فرض کنید $M\begin{vmatrix}t-۱\\t+۱\end{vmatrix}$ و $N\begin{vmatrix}t+۱\\t+۳\end{vmatrix}$ و نقطه‌ی P وسط پاره‌خط MN باشد.

الف) مختصات نقطه‌ی P را بنویسید.

ب) مطابق شکل ۹۵ــ۱، مختصات نقاط R و Q را بنویسید.

پ) اگر مساحت ذوزنقه MQRN را با s(t) نشان دهیم، ضابطه‌ی تابع s را بنویسید.



شکل ۹۵ــ۱

آزمون پایانی (۵)

محل پاسخ به سؤالات آزمون پایانی

۱ـ مقدار آبی که در هر ثانیه، برحسب لیتر، از فواره‌ی A وارد یک استخر می‌شود از دستور $f(t) = 2t$ و مقدار آبی که در هر ثانیه از فواره‌ی B وارد این استخر می‌شود از دستور $g(t) = 5t$ محاسبه می‌شود.

الف) مقدار آبی را که در هر ثانیه از هر دو فواره‌ی A و B وارد استخر می‌شود از کدام دستور می‌توان محاسبه کرد؟

ب) در ۵ ثانیه چقدر آب وارد استخر می‌شود؟

پ) اگر حجم استخر ۳۵۰۰۰ لیتر باشد دو فواره‌ی A و B در چه مدت این استخر را پر می‌کنند؟

۲ـ مختصات نقطه‌های متغیر M و N چنین است :

$$M\begin{vmatrix} t-1 \\ t^2+1 \end{vmatrix} \quad \text{و} \quad N\begin{vmatrix} t^2-1 \\ t+1 \end{vmatrix}$$

الف) مختصات وسط پاره‌خط MN را بنویسید.
ب) طول پاره‌خط MN را برحسب t به‌دست آورید.

بخش اول

فصل ششم

ترکیب دو تابع

هدف کلی

آموزش مفهوم ترکیب دو یا چند تابع و کاربردهای آن در حل مسائل

هدف‌های رفتاری: انتظار می‌رود فراگیر پس از پایان این فصل بتواند :

۱ــ ضابطه‌ی fog و gof را با داشتن ضابطه‌ی f و g بنویسد.

۲ــ مقدار تابع‌های fog و gof را در بعضی از نقطه‌های دامنه‌اش تعریف کند.

۳ــ مسائل مربوط به کاربرد ترکیب تابع‌ها را حل کند.

پیش‌آزمون (۶)

محل پاسخ به سؤالات پیش‌آزمون

۱ــ اگر $f(x)=x^2+4$ و $g(x)=3x-1$ مطلوب است محاسبه‌ی:

الف) $g(1)$ و $f(g(1))$

ب) $f(3)$ و $g(f(3))$

ج) $f(g(4))$ و $g(f(2))$

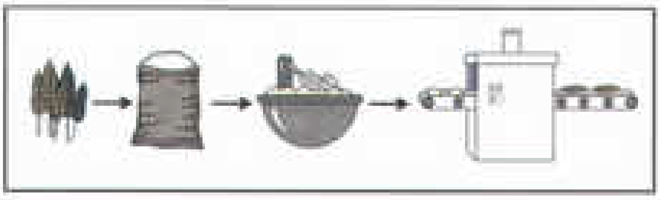
۲ــ اگر $f(x)=3x$ و $g(x)=\frac{1}{3}x$ ضابطه‌ی fog و gof را بنویسید.

۳ــ اگر $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ و $g(x)=\sqrt{x}$ تعیین کنید:

الف) $f(g(x))$

ب) $g(f(x))$

۶ــ۱ــ ترکیب دو تابع



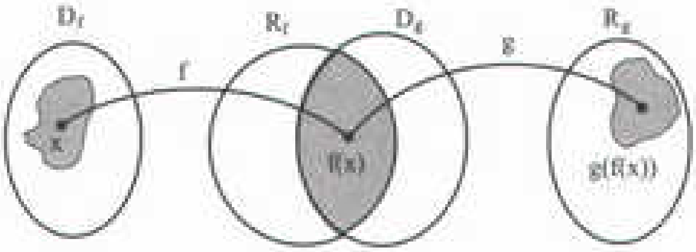
فرض کنید f و g دو تابع حقیقی باشند به‌طوری که اشتراک برد تابع f، یعنی R_f، و دامنه‌ی تابع g، یعنی D_g، تهی نباشد. یعنی،

$$R_f \cap D_g \neq \varnothing$$

ترکیب تابع g با f را با gof نشان می‌دهند و با ضابطه‌ی زیر تعریف می‌کنند:

$$(gof)(x) = g(f(x))$$

شکل ۹۶ــ۱ نشان می‌دهد که تابع gof فقط به‌ازای xهایی قابل تعریف است که f(x) به دامنه‌ی تابع g تعلق داشته باشد.

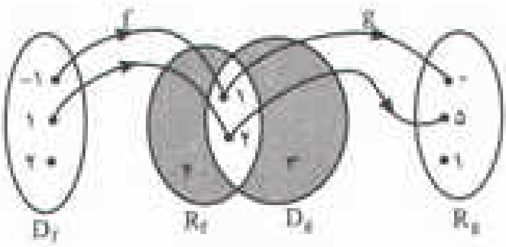


شکل ۹۶ــ۱

۱ــ۶ــ۱ــ مثال‌های حل شده

۱) فرض کنید $f = \{(۱,۲),(-۱,۱),(۲,۴)\}$ و $g = \{(۱,۰),(۲,۵),(۳,۱)\}$ با توجه به شکل ۹۷ــ۱ دامنه و برد gof نوشته شده‌اند.

$$D_{gof} = \{۱,-۱\}, \quad R_{gof} = \{۰,۵\}$$



شکل ۹۷ــ۱

۲) فرض کنید $f(x) = x^۲ + ۱$ و $g(x) = \sqrt{x}$، ضابطه‌ی gof را بنویسید.

حل ۲: با توجه به این که برای هر عدد حقیقی x، $f(x) = x^۲ + ۱ > ۰$ داریم

$$(gof)(x) = g(f(x)) = \sqrt{f(x)}$$
$$= \sqrt{x^۲ + ۱}.$$

۳) فرض کنید $f(x) = x - ۱$ و $g(x) = \frac{۱}{x}$، ضابطه‌ی fog را بنویسید.

حل ۳:

$$(fog)(x) = f(g(x)) = f(\frac{۱}{x}) = \frac{۱}{x} - ۱$$
$$= \frac{۱ - x}{x}.$$

تمرین ۱۱ــ۱

۱ــ اگر $f(x)=x^۲+۲x$ آن‌گاه $f(۱)$ ، $f(۲)$ ، $f(t)$ ، $f(۲t+۱)$ ، $f(t^۲)$ و $f(\sqrt{t})$ را تعیین کنید.

۲ــ فرض کنید $f(x)=x+۲$ و $g(x)=x^۲$. مقدار $(gof)(۱)$ و $(fog)(۱)$ را حساب کنید. آیا $fog=gof$ ؟

۳ــ ضابطه‌ی fog و gof را در هریک از حالات زیر حساب کنید.

الف) $f(x)=۲x,\quad g(x)=۱-۳x$

ب) $f(x)=x^۲,\quad g(x)=x+۱$

پ) $f(x)=x^۳,\quad g(x)=x^۲$

ت) $f(x)=x^۲\ ,\quad g(x)=\sqrt{x}$

۴ــ فرض کنید I تابع همانی با ضابطه‌ی $I(x)=x$ باشد. اگر f تابع دلخواهی باشد Iof و foI چه تابعی هستند؟

۵ــ فرض کنید $f(x)=۲x+۱$ و $g(x)=\frac{۱}{۲}x-\frac{۱}{۲}$. ضابطه‌ی fog و gof را تعیین کنید.

۶ــ فرض کنید $f(x)=x^۲+۱$ و $g(x)=\sqrt{x-۱}$. ضابطه‌ی gof و fog را تعیین کنید.

۷ــ فرض کنید $f^۲=fof$ و $f^n=\overbrace{fofo\dots of}^{f\text{ تا }n}$. ضابطه‌ی f^n را در هریک از حالات زیر تعیین کنید. (تمرین (الف) برای راهنمایی حل شده است.)

الف) $f(x)=x+۱\Rightarrow f^۲(x)=f(f(x))$
$=f(x)+۱=x+۱+۱=x+۲$

$f^۳(x)=f(f^۲(x))=f^۲(x)+۱$
$=(x+۲)+۱=x+۳\Rightarrow f^n(x)=x+n.$

ب) $f(x)=۲x$

پ) $f(x)=x^۲.$

۲ــ۶ــ۱ــ بازی و ریاضی

۱) تابع f بر مجموعه‌ی عددهای حسابی، یعنی $W=N\cup\{۰\}$ ، به‌صورت زیر تعریف شده است:

$f(n)=($ یکان عدد $n^۲)$ ، $(n\in W)$

مقدارهای $f^۲(n)=(fof)(n)$ را بدست آورید (برای n دلخواه).

برای کمک به شما مقدار $f^۲$ برای چند عدد در روبه‌رو حساب شده است. دیده می‌شود که مقدارهای $f^۲(x)$ متعلق به مجموعه‌ی زیر است:

$A=\{۰,۱,۵,۶\}.$

آیا هر عدد دلخواه n متعلق به W اختیار شود $(fof)(n)\in A$ (چرا؟)

$۳۲۵\xrightarrow{f}۵\xrightarrow{f}۵\Rightarrow f^۲(۳۲۵)=۵$

$۲۹۷\xrightarrow{f}۹\xrightarrow{f}۱$

$۳۴۰\xrightarrow{f}۰\xrightarrow{f}۰$

$۲۲۸\xrightarrow{f}۴\xrightarrow{f}۶$

$۱۶\xrightarrow{f}۶\xrightarrow{f}۶$

$۱۲\xrightarrow{f}۴\xrightarrow{f}۶$

$۲۳\xrightarrow{f}۹\xrightarrow{f}۱$

$۷۱\xrightarrow{f}۱\xrightarrow{f}۱$

$۵۴\xrightarrow{f}۶\xrightarrow{f}۶$

$۹\xrightarrow{f}۱\xrightarrow{f}۱$

۲) تابع f بر مجموعه‌ی عددهای حسابی به‌صورت زیر تعریف شده است:

$f(n)=($ یکان $n)^۲$ ، $(n\in W)$

آیا به‌ازای هر عدد n از W، $f^{3}(n) = (fofof)(n)$ به مجموعه‌ی زیر تعلق دارد؟ چرا؟

$$B = \{۰، ۱، ۲۵، ۳۶\}$$

۳) فرض کنید $n = ۲۸۴۵۷۶$ ؛ در رابطه با این عدد سه عدد دیگر می‌توان نوشت

$n_1 = ۶ =$ (تعداد رقم‌های عدد n)

$n_2 = ۴ =$ (تعداد رقم‌های زوج عدد n)

$n_3 = ۲ =$ (تعداد رقم‌های فرد عدد n)

اینک تابع f را بر مجموعه‌ی عددهای طبیعی چنین تعریف می‌کنیم:

$$f(n) = \overline{n_1 n_2 n_3}$$

(یعنی، عددی که از کنار هم گذاشتن سه عدد n_1 ، n_2 و n_3 حاصل می‌شود)

بنابراین: $f(۲۸۴۵۷۶) = ۶۴۲$.

حالا به مثال‌های روبه‌رو توجه کنید.

آیا برای هر عدد طبیعی n، اگر فرایند بالا را روی آن انجام دهیم، درنهایت به عدد ۳۱۲ می‌رسیم؟ [۱۱]

امتحان کنید!

$۲۵۲ \xrightarrow{f} ۴ \xrightarrow{f} ۱۶ \xrightarrow{f} ۳۶ \Rightarrow f^{3}(۲۵۲) = ۳۶$

$۱۰۰ \xrightarrow{f} ۰ \xrightarrow{f} ۰ \xrightarrow{f} ۰$

$۴۵ \xrightarrow{f} ۲۵ \xrightarrow{f} ۲۵ \xrightarrow{f} ۲۵$

$۱۷ \xrightarrow{f} ۴۹ \xrightarrow{f} ۸۱ \xrightarrow{f} ۱$

$۹۳ \xrightarrow{f} ۹ \xrightarrow{f} ۸۱ \xrightarrow{f} ۱$

$۱۴۶ \xrightarrow{f} ۳۶ \xrightarrow{f} ۳۶ \xrightarrow{f} ۳۶$

$۲۱ \xrightarrow{f} ۱ \xrightarrow{f} ۱ \xrightarrow{f} ۱$

$۷۴ \xrightarrow{f} ۱۶ \xrightarrow{f} ۳۶ \xrightarrow{f} ۳۶$

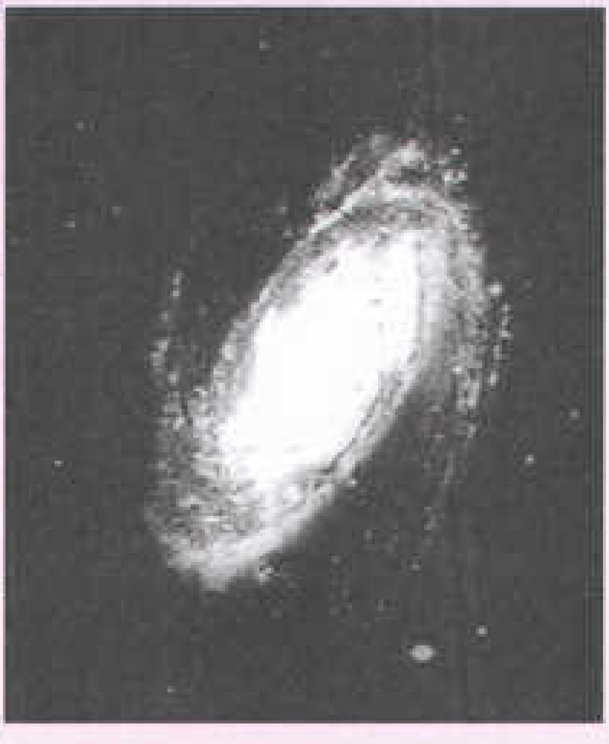
$۹۸ \xrightarrow{f} ۶۴ \xrightarrow{f} ۱۶ \xrightarrow{f} ۳۶$

$۱۰۹ \xrightarrow{f} ۸۱ \xrightarrow{f} ۱ \xrightarrow{f} ۱$

$۲۸۴۵۷۶ \xrightarrow{f} ۶۴۲ \xrightarrow{f} ۳۳۰ \xrightarrow{f} ۳۱۲ \xrightarrow{f} ۳۱۲$.

$۲۴۹ \xrightarrow{f} ۳۲۱ \xrightarrow{f} ۳۱۲$.

$۲۰۱۳۸۹۷۳۲۵۶۴ \xrightarrow{f} ۱۲۶۶ \xrightarrow{f} ۴۳۱ \xrightarrow{f} ۳۱۲$.



آزمون پایانی (۶)

محل پاسخ به سؤالات آزمون پایانی

۱ــ اگر $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$ آن‌گاه $f(2)$ ، $f(\frac{1}{2})$ ، $f(\sqrt{3})$ ، $f(\frac{1}{x})$ و $(fof)(x)$ را تعیین کنید.

۲ــ اگر $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ و $g(x)=\sqrt{2-x}$ باشند حساب کنید:

الف) $f(g(2))$ و $g(f(1))$

ب) $f(g(x))$ و $g(f(x))$

پ) آیا برای هر x، $g(f(x))=f(g(x))$؟

۳ــ فرض کنید $f(x)=x^2+5x$ و $g(x)=\frac{1}{x-1}$.

الف) $(fog)(x)$ را تعیین کنید.

ب) D_f و D_g را تعیین کنید.

۴ــ اگر $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ و $g(x)=\sin x$ کدام‌یک از مقدارهای $(fog)(\frac{\pi}{6})$ و $(gof)(3)$ را می‌توان تعیین کرد؟ چرا؟

تمرین‌های تکمیلی بخش اول

۱ـ نقطه‌های نظیر $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ و $\sqrt{۳}$ را روی یک محور اعداد حقیقی مشخص کنید (روش انجام کار را شرح دهید).

۲ـ الف) نقطه‌های $A(۳,۴)$ و $B(۱,۲)$ و $C(۵,۲)$ را در یک دستگاه مختصات قائم مشخص کنید.

ب) نوع مثلث ABC را تعیین کنید.

پ) مختصات نقطه‌ی A'، وسط ضلع BC، را به‌دست آورید.

ت) طول میانه‌ی AA' از این مثلث را حساب کنید.

۳ـ مقدارهای a و b را چنان بیابید که دو نقطه‌ی $M(b-۱,۱-a)$ و $M'(a+۲,۳b)$ نسبت به محور xها قرینه‌ی یکدیگر باشند. سپس مختصات این دو نقطه را حساب کنید.

۴ـ آیا نقطه‌ی $A(۲m-۱,m)$ می‌تواند بر نقطه $B(۲,-۳)$ منطبق باشد؟ چرا؟

۵ـ هریک از نامعادله‌های زیر را حل کنید و جواب آن‌ها را به‌صورت مجموعه و نماد بازه بنویسید و روی محور اعداد نیز نشان دهید.

الف) $۱ < -۲x + ۳ < ۹$

ب) $\frac{x+۲}{۳} > \frac{۱-x}{۲}$

۶ـ اگر $A = [-۳,۴]$ و $B = [۲,۵]$ باشند، بازه‌های زیر را تعیین کنید.

الف) $A \cap B$

ب) $A \cup B$

پ) $A - B$

۷ـ ولتاژ ورودی یک ترانسفورمر ۲۳۰ ولت و ولتاژ خروجی آن ۱۱/۵ ولت است. ثابت این ترانسفورمر را تعیین کنید.

۸ـ کدام مجموعه یک تابع را مشخص می‌کند؟

الف) $\{(۲,۵),(۳,-۱),(۴,۶),(-۲,۲)\}$

ب) $\{(-۱,۳),(۲,۴),(۳,۲),(-۲,۷),(۲,۶)\}$

۹ـ کدام، ضابطه‌ی یک تابع است؟

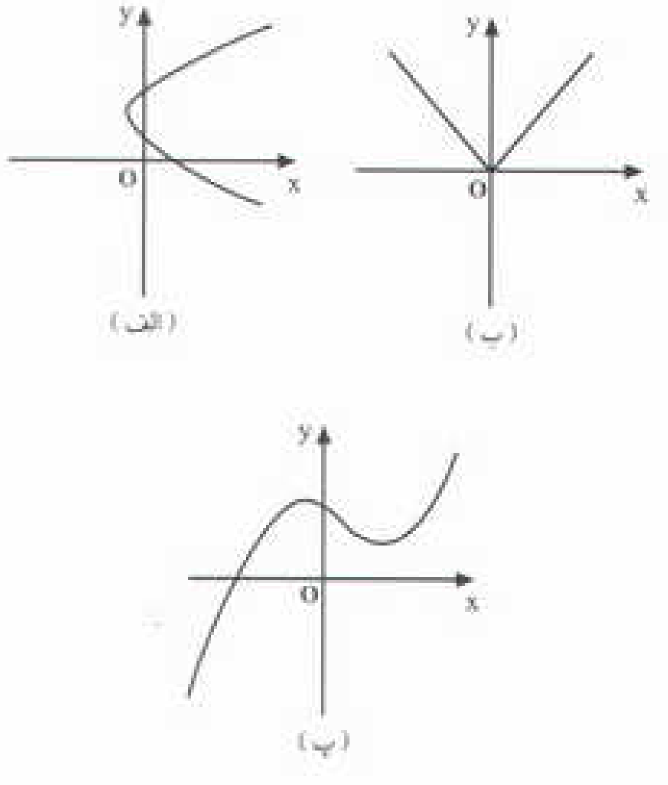
الف) $y + x^۲ - ۴ = ۰$

ب) $y^۲ + x - ۴ = ۰$

پ) $|y| = x + ۳$

ت) $y = |x| - ۲$

۱۰ـ کدام شکل، نمودار یک تابع را مشخص می‌کند؟ (شکل ۹۸ـ۱).



شکل ۹۸ـ۱

۱۱ـ تابع $y=-x^2+4x$ داده شده است؟

الف) نمودار این تابع را رسم کنید.

ب) آیا نقطه‌ی $A(2,4)$ روی این نمودار است؟

پ) مقدار m را چنان بیابید که نقطه‌ی $(2m,1)$ روی نمودار این تابع باشد.

۱۲ـ اگر $f(x)=ax^2+3x-a$ باشد، مقدار a را چنان بیابید که $f(2)=8$ باشد.

۱۳ـ نمودار هریک از تابع‌های زیر را رسم کنید.

الف) $y=[x+3]$

ب) $y=\sin(x-\frac{\pi}{4})$ و $x\in[0,2\pi]$

۱۴ـ دامنه‌ی هریک از تابع‌های زیر را رسم کنید.

الف) $y=-2x^2+x$

ب) $y=\frac{3x}{x^2-1}$

ت) $y=\sin 2x$

پ) $y=\sqrt{5x+x^2}$

۱۵ـ اگر $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ و $g(x)=x^2-1$ باشد.

الف) ضابطه‌ی $(f.g)(x)$

ب) ضابطه‌ی $(gof)(x)$

پ) $f(2)\times g(2)$

ت) $g\left(f(2\sqrt{2})\right)$

ث) $f(3).g(\frac{1}{4})$

را تعیین کنید.

۱۶ـ اگر $f(x)=\sqrt{2x}$ و $g(x)=x^2-1$ باشد، ضابطه‌ی $(gof)(x)$ را تعیین کنید.

بخش دوم

حد و پیوستگی

هدف کلی بخش

درک مفهوم حد و به‌کارگیری آن در تعیین پیوستگی تابع‌ها.

جدول عناوین فصل‌ها

شماره‌ی فصل	عنوان فصل	زمان
اول	حد	۱۴ساعت
دوم	پیوستگی	۱۰ساعت
سوم	تعمیم حد	۱۶ساعت

بخش دوم

فصل اول

حد

هدف کلی

درک مفهوم میل کردن یک متغیر به یک عدد و میل کردن مقدارهای یک تابع به یک عدد و تعمیم مفهوم حد

هدف‌های رفتاری: انتظار می‌رود فراگیر پس از پایان این فصل بتواند :

۱ــ میل کردن یک متغیر را از چپ و راست به یک عدد، به $+\infty$ یا به $-\infty$ تعریف کند.

۲ــ حدّ تابع را تعریف کند.

۳ــ حدّ چپ و حدّ راست یک تابع در یک نقطه را تعریف کند.

۴ــ حدّ چپ و حدّ راست تابع را از روی نمودار آن تعیین کند.

۵ــ حدّ چپ و حدّ راست تابع را از روی ضابطه‌ی آن تعیین کند.

پیش‌آزمون (۱)

۱ــ عددهای $\frac{1}{2}، \frac{2}{3}، \frac{3}{4}، \frac{4}{5}، \ldots$ روی محور اعداد مشخص شده‌اند (شکل ۱ــ۲).

الف) این عددها مرتباً به چه عددی نزدیک و نزدیک‌تر می‌شوند؟

ب) این عددها از کدام سَمت (راست، چپ یا هر دو) به آن عدد نزدیک می‌شوند؟

۲ــ عددهای $\frac{2}{1}، \frac{1}{2}، \frac{3}{2}، \frac{2}{3}، \frac{4}{3}، \frac{3}{4}، \ldots$ را روی محور مشخص کنید (شکل ۲ــ۲).

الف) این عددها به چه عددی نزدیک و نزدیک‌تر می‌شوند؟

ب) این عددها از کدام سَمت به آن عدد نزدیک می‌شوند؟

۳ــ می‌خواهیم $s = 1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^9 + 3^{10}$ را حساب کنیم. در مقابل $-s$ و $3s$ در دو ردیف زیر هم نوشته شده‌اند.

الف) عددهای هر ستون را با هم جمع کنید و زیر خط بنویسید.

ب) مقدار s را تعیین کنید.

۴ــ به روش سؤال ۳، مقدار

$$s = 1 + r + r^2 + \cdots + r^n$$

را به‌دست آورید.

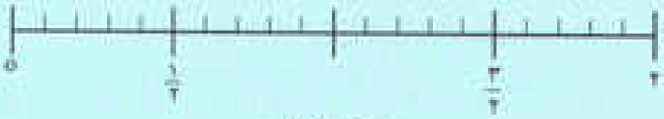
۵ــ تابع f با ضابطه‌ی زیر در $\mathbb{R}$ تعریف شده است:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 2 \\ 6 - x & x > 2 \end{cases}$$

این تابع در $x = 2$ تعریف نشده است (شکل ۳ــ۲).
اگر $x_1، x_2، \ldots، x_n$ به ۲ نزدیک و نزدیک‌تر شوند، عددهای $f(x_1)، \ldots، f(x_n)$ به چه عددی نزدیک می‌شوند؟

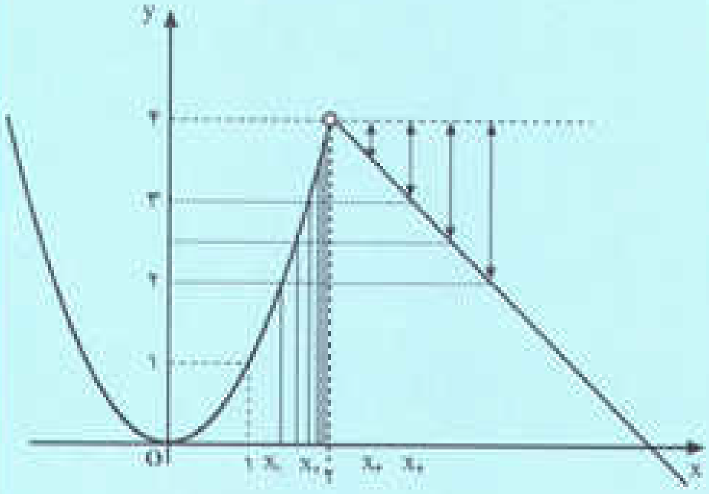
محل پاسخ به سؤالات پیش آزمون

شکل ۱ــ۲



شکل ۲ــ۲

$$-s = -1 - 3 - 3^2 - \cdots - 3^9 - 3^{10}$$
$$3s = \quad 3 + 3^2 + \cdots + 3^9 + 3^{10} + 3^{11}$$



شکل ۳ــ۲

مقدمه

فرض کنید اتومبیلی در نقطه‌ی $A(0,2)$ ایستاده است. چراغ راهنما سبز می‌شود و اتومبیل با سرعت رو به افزایش بر روی یک خط راست حرکت می‌کند. شکل ۴ــ۲ در صفحه‌ی بعد را ملاحظه کنید.

رابطه‌ی (۱) محل اتومبیل را، نسبت به زمان، در هر لحظه مشخص می‌کند. طبق این رابطه در آغاز حرکت ($t = 0$) فاصله‌ی اتومبیل تا مبدأ مختصات ۲ متر است. یعنی، $y_A = 2m$ و $t_A = 0$.

$$y = \frac{1}{4}t^2 + 2 \qquad (1)$$

اتومبیل دوثانیه پس از حرکت به نقطه‌ی B، به فاصله‌ی ۳ متر از مبدأ می‌رسد. $y_B = 3m$ و $t_B = 2s$. اتومبیل چهار ثانیه پس از حرکت به نقطه‌ی C، به فاصله‌ی ۶ متر از مبدأ می‌رسد. $y_C = 6m$ و $t_C = 4s$.

با استفاده از معادله‌ی (۱) جدول مکان ــ زمان ۱ــ۲ را خواهیم داشت.

جدول ۱ــ۲

نقطه	A	B	C	D	E
t	۰	۲	۴	۶	۸
y	۲	۳	۶	۱۱	۱۸

نمودار y نسبت به تغییرات t نیز در صفحه مقابل رسم شده است.

طبق تعریف، اگر بخواهیم سرعت متوسط اتومبیل را به‌دست آوریم، باید اندازه‌ی جابه‌جایی را به مدّت حرکت تقسیم کنیم. یعنی،

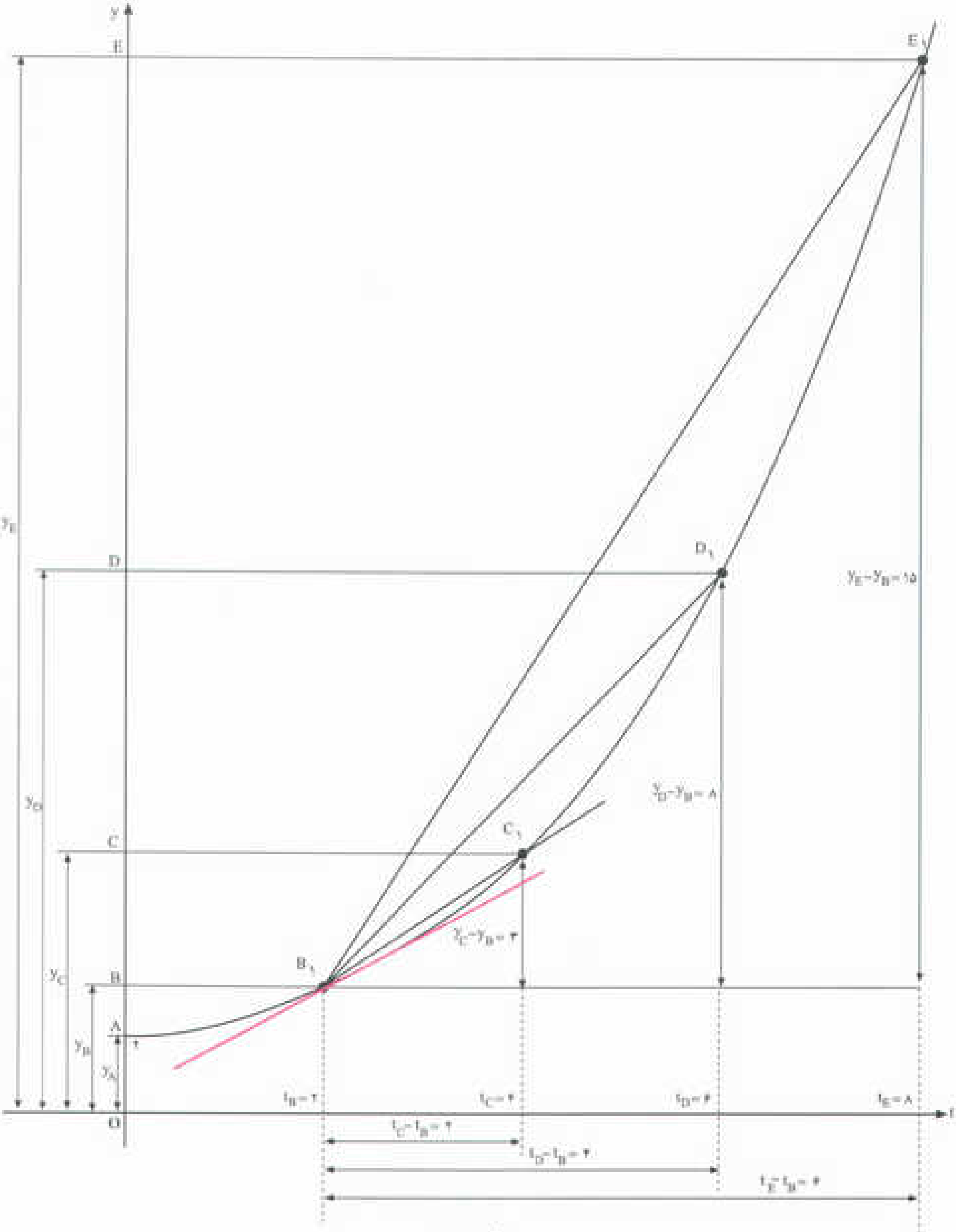
$$\text{سرعت متوسط} = \frac{\text{اندازه‌ی جابه‌جایی}}{\text{مدت حرکت}}$$

طبق این تعریف، سرعت متوسط اتومبیل در مدتی که از B به E رفته است، از رابطه‌ی روبه‌رو به دست می‌آید.

$$\text{سرعت متوسط از B به E} = \frac{\text{اندازه‌ی جابه‌جایی از B تا E}}{\text{مدت حرکت از B به E}}$$

$$= \frac{y_E - y_B}{t_E - t_B} = \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

$$= \frac{18 - 3}{8 - 2} = \frac{15}{6}\,\frac{m}{s}$$



y
E
D
C
B
A
O
t
E_1
D_1
C_1
B_1
y_E
y_D
y_C
y_B
y_A
$y_E - y_B = ۱۵$
$y_D - y_B = ۸$
$y_C - y_B = ۳$
$t_B = ۲$
$t_C = ۳$
$t_D = ۴$
$t_E = ۸$
$t_C - t_B = ۱$
$t_D - t_B = ۲$
$t_E - t_B = ۶$

شکل ۴ـ۲

می‌دانید که طبق تعریف، شیب خط B_1E_1 نیز از تقسیم $\Delta y = y_E - y_B$ بر $\Delta t = t_E - t_B$ به‌دست می‌آید (طبق تعریف و شکل ۴ـ۲).

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = B_1E_1 \text{ شیب خط } = \frac{۱۸ - ۳}{۸ - ۲} = \frac{۱۵}{۶}$$

اگر مدت حرکت را کم کنیم یعنی زمان $\Delta t = t_E - t_B$ را کمتر کنیم مسافتی که اتومبیل طی می‌کند یعنی، $\Delta y = y_E - y_B$ نیز کوتاه‌تر می‌شود.

لذا، اگر بخواهیم سرعت متوسط اتومبیل را در مدت کوتاه‌تر، یعنی در مدتی که اتومبیل از B به D رفته است، به دست آوریم، طبق تعریف و شکل ۴ـ۲، داریم :

$$\text{سرعت متوسط از B به D} = \frac{\text{اندازه‌ی جابه‌جایی از B تا D}}{\text{مدت حرکت از B به D}}$$

$$= \frac{y_D - y_B}{t_D - t_B} = \frac{۱۱ - ۳}{۶ - ۲} = ۲\frac{m}{s}$$

ضمناً، شیب خط B_1D_1 چنین حساب می‌شود :

$$B_1D_1 \text{ شیب خط } = \frac{y_D - y_B}{t_D - t_B}$$

$$= \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{۱۱ - ۳}{۶ - ۲} = ۲$$

اگر مدت حرکت را باز هم کم‌تر کنیم، یعنی اگر $\Delta t = t_D - t_B$ را باز هم کوچک کنیم، مسافتی که اتومبیل طی می‌کند، یعنی $\Delta y = y_D - y_B$ نیز باز هم کوتاه‌تر می‌شود.

حال اگر بخواهیم سرعت متوسط اتومبیل را در مدتی که از B به C رفته است حساب کنیم باید بنویسیم :

$$\text{سرعت متوسط اتومبیل از B به C} = \frac{y_C - y_B}{t_C - t_B} = \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

$$= B_1C_1 \text{ شیب خط } = \frac{۶ - ۳}{۴ - ۲}$$

$$= \frac{۳}{۲}.$$

وقتی شما در اتومبیل در حال حرکت نشسته‌اید و می‌خواهید سرعت اتومبیل را بدانید، به کیلومترشمار نگاه می‌کنید. مدتی طول می‌کشد تا چشم شما کیلومترشمار را ببیند و حاصل دیدن به مغز شما منتقل شود. این مدت، مدت بسیار کوتاهی است، ولی اتومبیل در این مدت بسیار کوتاه به اندازه‌ی بسیار کم جابه‌جا شده است، حاصل تقسیم این جابه‌جایی کوتاه به آن مدت کوتاه، سرعت لحظه‌ای اتومبیل است که شما روی صفحه‌ی کیلومتر شمار مشاهده می‌کنید. این سرعت می‌تواند سرعت موتورسیکلت، سرعت اتومبیل، سرعت هواپیما یا سرعت فضاپیما باشد که عدد بسیار بزرگی است.

شکل ۵ـ۲

تاکنون، به موضوع مورد بحث کاملاً به عنوان یک پدیده‌ی موجود در زندگی نگاه کردیم. حالا این مطلب از دید ریاضی می‌نگریم.

به نموداری که با استفاده از جدول ۱ــ۲ رسم شده است نگاه کنید. شیب خط B_1E_1 از تقسیم Δy بر Δt مربوط به‌دست می‌آید. اگر Δt را کوچک‌تر کنیم خط بعدی، یعنی خط B_1D_1 را می‌توانیم رسم کنیم. اگر Δt را باز هم کوچک و کوچک‌تر کنیم در حد خط قاطع به خط مماس بر منحنی در نقطه B_1 تبدیل می‌شود.

با توجه به آنچه گفته شد، شیب خط مماس بر منحنی در B_1 با سرعت لحظه‌ای در B_1 برابر است. لذا، گفته می‌شود :

سرعت لحظه‌ای، حدّ سرعت متوسط است وقتی Δt به صفر میل می‌کند.

در نمودار رسم شده ما می‌خواستیم شیب خط مماس را در نقطه‌ی B_1 تعیین کنیم، لذا، خط‌های قاطع را از نقطه‌ی B_1 رسم کردیم و بر نقطه‌ی B_1 تأکید نمودیم. اگر می‌خواستیم شیب خط مماس در نقطه‌ی C_1 را به‌دست آوریم، خط‌های قاطع را از نقطه‌ی C_1 رسم می‌کردیم و سرعت (لحظه‌ای) در نقطه‌ی C_1 را به‌دست می‌آوردیم.

شکل ۶ــ۲

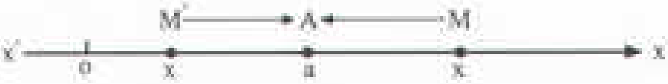
۱ــ۲ــ حد

حد یکی از مفهوم‌های اساسی و مهم ریاضیات است. مفهوم‌هایی چون پیوستگی، مشتق و ... در رابطه‌ی نزدیک با مفهوم حد هستند.

در این فصل، سعی می‌کنیم با بیان مثال‌هایی، تا حدودی مفهوم ریاضی حد را روشن کنیم.

۱ــ۱ــ۲ــ میل کردن یک متغیر به یک عدد ثابت:

فرض کنید دو متحرک M و M' روی محور اعداد به سمت نقطه‌ی معین A از یک شهر در حرکت هستند. فاصله‌ی بین این متحرک‌ها و نقطه‌ی A مرتباً کم و کم‌تر می‌شود ؛ به عبارت دیگر، x متحرک M (یا متحرک M') مرتباً به عدد a نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود (شکل ۷ــ۲).



شکل ۷ــ۲

تعریف ۱: متغیر x به عدد ثابت a میل می‌کند، و می‌نویسیم $x \to a$، در صورتی که فاصله‌ی بین متحرک M و نقطه‌ی A مرتباً کم و کم‌تر شود. جدول ۲ـ۲ میل کردن متغیر x را به عدد ۳ نشان می‌دهد.

جدول ۲ـ۲

$x \to 3^-$ $x \to 3^+$

x	...	۱/۵	۲	۲/۵	۲/۹	۲/۹۹	...	۳	...	۳/۰۰۱	۳/۰۱	۳/۱	۳/۵	۴	...

اگر مجدداً به محور بالا توجه کنید ملاحظه می‌کنید که متحرک M' از چپ و متحرک M از راست به A نزدیک می‌شوند.

تعریف ۲: اگر x با مقادیر بزرگ‌تر از a به a میل کند (یعنی، همیشه $x-a>0$) گوییم x از راست به a میل می‌کند و می‌نویسیم $x \to a^+$.

تعریف ۳: اگر x با مقادیر کوچک‌تر از a به a میل کند (یعنی، همیشه $x-a<0$) گوییم x از چپ به a میل می‌کند و می‌نویسیم $x \to a^-$.

شکل ۸ـ۲

اکنون فرض کنید که دو متحرک M و M' از نقطه‌ی A دور می‌شوند.

تعریف ۴: متغیر x به $+\infty$ میل می‌کند در صورتی که بتوان فاصله‌ی متحرک M را تا نقطه‌ی A از هر عدد مثبت بزرگی بزرگ‌تر کرد، و می‌نویسیم: $x \to +\infty$.

تعریف ۵: متغیر x به $-\infty$ میل می‌کند در صورتی که بتوان x را از هر عدد منفی دلخواه انتخاب شده کوچک‌تر کرد.

نکته: به سادگی می‌توان ملاحظه کرد که وقتی $x \to -\infty$ آنگاه $(-x) \to +\infty$.

جدول‌های ۳ـ۲ و ۴ـ۲ میل کردن متغیر x را به $+\infty$ یا $-\infty$ نشان می‌دهند.

جدول ۳ـ۲

x	...	۱	۱۰	۱۰۰۰	۱۰۰۰۰	10^8	10^{10}	10^{100}	...

$x \to +\infty$

جدول ۴ـ۲

x	...	-10^{100}	-10^{10}	-10^8	-10^4	−۱۰۰۰	−۱۰	−۱	...

$x \to -\infty$

کار در کلاس ۱ـ۲

با توجه به جدول‌های ۵ـ۲ تا ۷ـ۲ بنویسید که x به چه عددی میل می‌کند.

جدول ۵ـ۲

x	...	۰	۰/۵	۰/۸	۰/۹	۰/۹۹	۰/۹۹۹	...	۱	...	۱/۰۰۱	۱/۰۱	۱/۱	۱/۵	۲	...

$x \to$

جدول ۶ـ۲

x	...	۱	۱/۲	۱/۵	۱/۸	۱/۹	۱/۹۹	۱/۹۹۹	...	۲

$x \to$

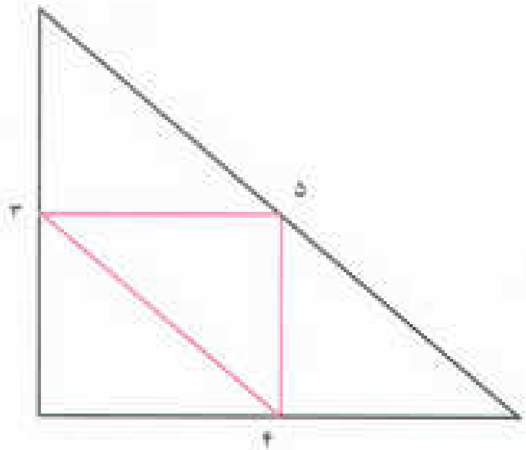
جدول ۷ـ۲

x	−۱	...	−۰/۹۹۹	−۰/۹۹	−۰/۹	−۰/۷	−۰/۵	۰	...

$x \to$

قبل از پرداختن به حد تابع‌ها، با چند فعالیت مفهوم حد را روشن می‌کنیم.

فعالیت ۱ـ۲

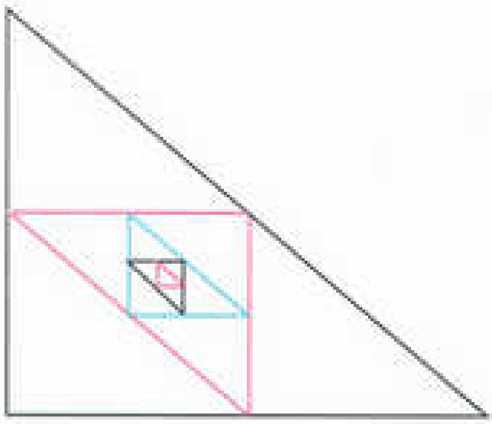


شکل ۹ـ۲

در شکل ۹ـ۲ یک مثلث قائم‌الزاویه را، با اضلاع ۴،۳ و ۵ واحد ملاحظه می‌کنید. اندازه‌ی وتر این مثلث را x_0 می‌نامیم. بنابراین، $x_0 = ۵$.

۱) اندازه‌ی محیط این مثلث را P_0 می‌نامیم. واضح است که :
$$P_0 = ۳ + ۴ + ۵ = ۱۲$$

۲) مطابق شکل، وسط اضلاع به‌هم وصل شده‌اند تا مثلث قرمز رنگ ایجاد شود. اندازه‌ی وتر مثلث جدید را x_1 می‌نامیم. اندازه‌ی x_1 چقدر است؟ $x_1 = ?$


شکل ۱۰ـ۲

۳) اندازه‌ی محیط مثلث جدید را P_1 می‌نامیم. اندازه‌ی P_1 چقدر است؟ $P_1 = ?$

اگر عمل وصل کردن وسط ضلع‌های مثلث‌های جدید را ادامه دهیم به شکل ۱۰ـ۲ می‌رسیم.

۴) اندازه‌ی وترها و محیط مثلث‌های بعدی را بنویسید.

$x_2 = \cdots$ $\quad$ $x_3 = \cdots$ $\quad$ $x_4 = \cdots$

$P_2 = \cdots$ $\quad$ $P_3 = \cdots$ $\quad$ $P_4 = \cdots$

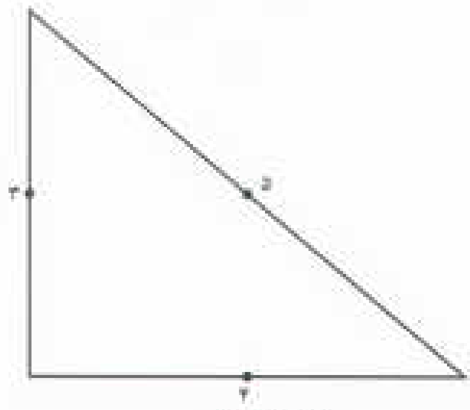
۵) اگر عمل وصل کردن وسط ضلع‌های مثلث‌های جدید را باز هم ادامه دهیم، اندازه‌ی وتر مثلث‌ها به چه عددی نزدیک می‌شود؟

۶) اندازه‌ی محیط مثلث‌ها به چه عددی نزدیک می‌شود؟

کار در کلاس ۲ـ۲

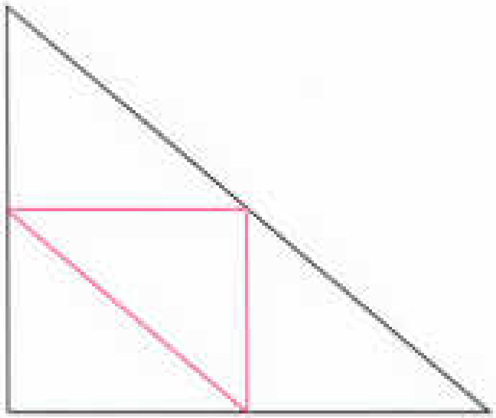
در شکل ۱۱ـ۲ یک مثلث قائم‌الزاویه با اضلاع ۴،۳ و ۵ واحد ملاحظه می‌کنید. اندازه‌ی وتر این مثلث $x_0 = ۵$ و مساحت آن برابر است با

$$S_0 = \frac{۳ \times ۴}{۲} = ۶$$



شکل ۱۱ـ۲

۱) وسط ضلع‌های مثلث را به‌هم وصل کرده‌ایم (شکل ۱۲ــ۲).



شکل ۱۲ــ۲

۲) اندازه‌ی وتر مثلث جدید را x_1 بنامید. اندازه‌ی x_1 چقدر است؟

$x_1 = ?$

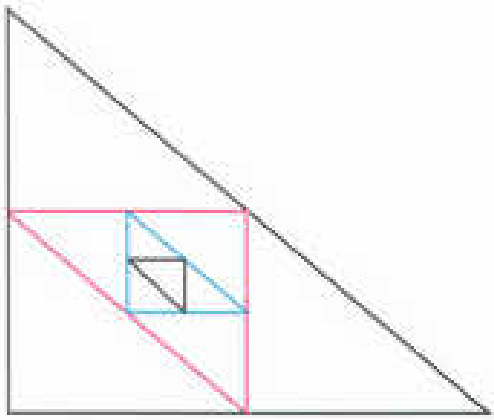
۳) مثلث اولیه به چند مثلث کوچک تقسیم شده است؟ ... مثلث.

۴) آیا مساحت این مثلث‌ها برابرند؟ چرا؟

۵) اندازه‌ی مساحت مثلث کوچک وسط را S_1 بنامید.

$S_1 = ?$

۶) همانند فعالیت ۱ــ۲، عمل وصل کردن وسط ضلع‌های مثلث‌های جدید را ادامه دهید (۳ بار دیگر) (شکل ۱۳ــ۲).



شکل ۱۳ــ۲

۷) اندازه‌ی وتر و مساحت مثلث‌های جدید را بنویسید.

$x_2 = \cdots$ $\quad x_3 = \cdots$

$S_2 = \cdots$ $\quad S_3 = \cdots$

$x_4 = \cdots$

$S_4 = \cdots$

۸) اندازه‌ی وتر مثلث‌ها به چه عددی میل می‌کنند؟

۹) اندازه‌ی مساحت مثلث‌ها به چه عددی نزدیک می‌شوند؟

۱۰) آیا درست است که بنویسیم :

$S_n \to 0$

$x_n \to 0$

مثال: اگر $0 < r < 1$ ثابت کنید

$$1 + r + r^2 + r^3 + \cdots = \frac{1}{1-r}.$$

حل: سعی می‌کنیم به‌طور شهودی این تساوی را اثبات کنیم:

مربع ABCD به ضلع واحد را درنظر بگیرید. مثلث‌های ADE و ABS متشابه‌اند. چرا؟ (شکل ۱۴ــ۲)

نسبت تشابه آن‌ها را می‌نویسیم:

$$\frac{AD}{DE} = \frac{BS}{AB} \Rightarrow \frac{1}{1-r} = \frac{BS}{1}$$

بنابراین، $BS = \frac{1}{1-r}$ و $CS = \frac{1}{1-r} - 1 = \frac{r}{1-r}$.

پاره‌خط CF را مساوی r انتخاب می‌کنیم $FS = CS - r = \frac{r^2}{1-r}$ است. از F پاره‌خط FF' را به موازات CE رسم می‌کنیم. بنابر قضیه‌ی تالس، در مثلث SCE، داریم:

$$\frac{FF'}{CE} = \frac{FS}{CS}$$

در نتیجه،

$$\frac{FF'}{r} = \frac{\frac{r^2}{1-r}}{\frac{r}{1-r}} \Rightarrow FF' = r^2$$

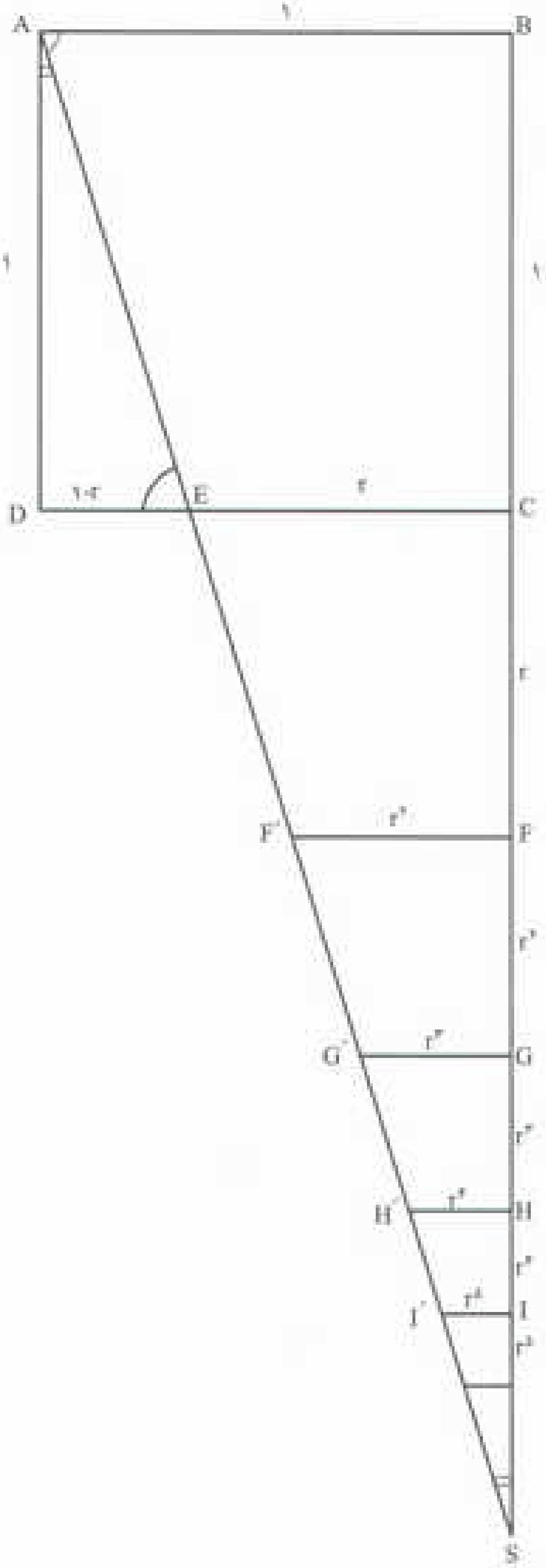
به همین ترتیب، اگر $FG = r^2$ انتخاب شود، خواهیم داشت: $GG' = r^3$ و ....

بنابراین، $BS = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots$ $\qquad (*)$

یعنی، اگر $0 < r < 1$ آن‌گاه $1 + r + r^2 + r^3 + \cdots = \frac{1}{1-r}$

بدیهی است که در این حالت، $r^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$، یعنی وقتی توان r به $+\infty$ میل می‌کند r^n به صفر میل می‌کند.

از رابطه‌ی $(*)$ نتیجه‌های زیر به‌دست می‌آید که آن‌ها را در فعالیت بعدی مورد استفاده قرار خواهیم داد.



شکل ۱۴ــ۲

نتیجه‌ی ۱: اگر $r=\frac{1}{2}$ آن‌گاه

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$$

نتیجه‌ی ۲: اگر $r=\frac{1}{3}$ آن‌گاه

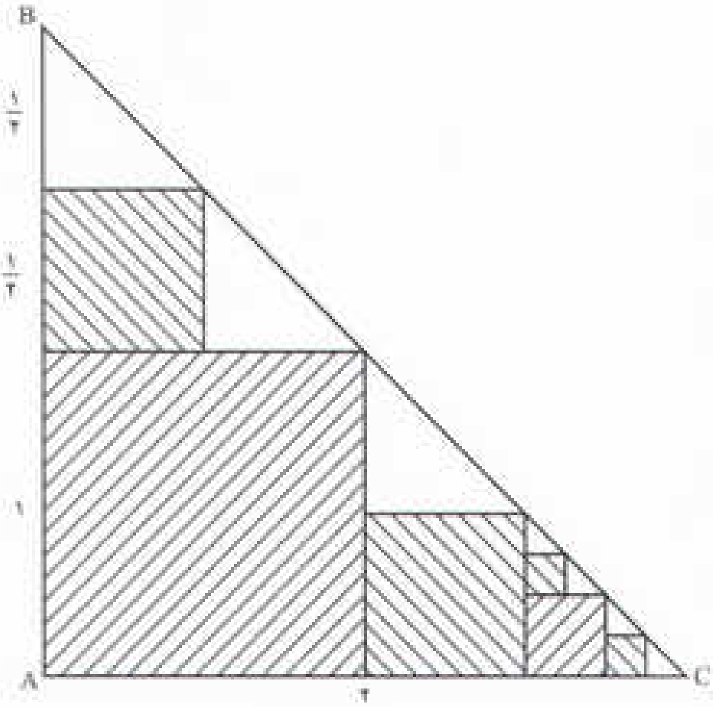
$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\cdots=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}=1/5$$

فعالیت ۲ـ۲

مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین ABC ، به‌طول ساق ۲ واحد، رسم شده است. از وسط هر ساق عمودی خارج شده تا یک مربع و دو مثلث ایجاد شود.

مجدداً از وسط هر ساق مثلث‌های جدید، عمودی خارج شده تا مربع و مثلث‌های جدید ایجاد شود (شکل ۱۵ـ۲).

۱) شما نیز دو بار دیگر، مشابه آنچه روی یکی از مثلث‌های کوچک صورت گرفته، این کار را انجام دهید.



شکل ۱۵ـ۲

می‌خواهیم مجموع مساحت‌های تمام مربع‌های سایه زده شده را حساب کنیم.

برای این منظور کارهای زیر را انجام دهید.

الف) شکل ۱۶ـ۲ را کامل کنید. (در این شکل مربع‌های سایه زده شده به طرز مقیدی روی هم قرار گرفته‌اند.)

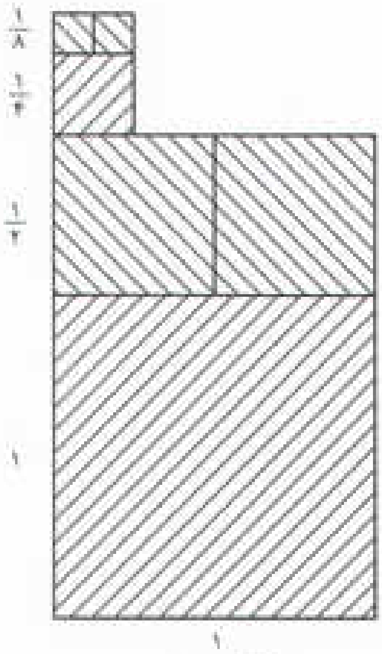
ب) به کمک شکل، و نتیجه‌ی ۱ مثال فوق ، سعی کنید عددی که طول مستطیل حاصل به آن نزدیک می‌شود را به دست آورید.

پ) مساحت شکل حاصل به چه عددی نزدیک می‌شود؟

۲) مجموع مساحت‌های مربع‌های سایه زده شده چه ارتباطی با مساحت مثلث ABC دارد؟

۳) فقط با توجه به شکل ۱۵ـ۲ مساحت کل قسمت‌های سایه زده شده را حساب کنید. راهنمایی : نشان دهید که مساحت کل موردنظر برابر است با ۲.

۴) مساحت کلّ قسمت‌های هاشور زده نشده به چه عددی نزدیک می‌شود؟



شکل ۱۶ـ۲

تمرین ۱ـ۲

در شکل ۱۷ـ۲، مثلثی متساوی‌الاضلاع به ضلع $x_0 = 2$ رسم شده است. مساحت این مثلث $S_0 = \sqrt{3}$ است. چرا؟

۱) وسط ضلع‌های مثلث را به‌هم وصل کنید.

۲) اندازه‌ی ضلع مثلث جدید را x_1 بنامید.

$x_1 = \cdots$

شکل ۱۷ـ۲

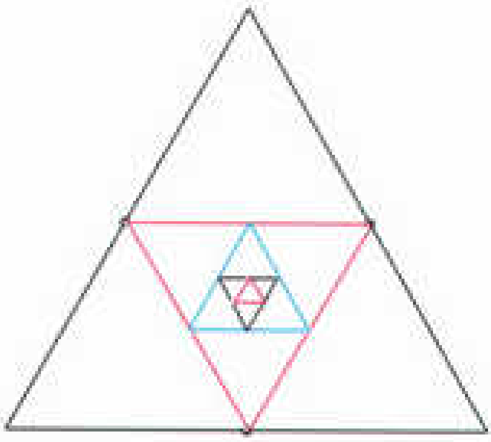
۳) مثلث به چند مثلث کوچک تقسیم شده است؟ ... مثلث.

۴) آیا مساحت این مثلث‌ها برابرند؟ چرا؟

۵) مساحت مثلث وسط را S_1 بنامید.

این عمل را مطابق شکل ۱۸ـ۲ ادامه داده‌ایم.

۶) اندازه‌ی ضلع‌ها و مساحت مثلث‌های جدید را بنویسید.



شکل ۱۸ـ۲

$x_2 = \cdots \qquad x_3 = \cdots \qquad x_4 = \frac{1}{8}$

$S_2 = \cdots \qquad S_3 = \cdots \qquad S_4 = \frac{\sqrt{3}}{256}$

۷) اندازه‌ی ضلع‌های مثلث‌ها به چه عددی میل می‌کند؟

۸) اندازه‌ی مساحت مثلث‌ها به چه عددی نزدیک می‌شود؟

آیا درست است که بنویسیم؟

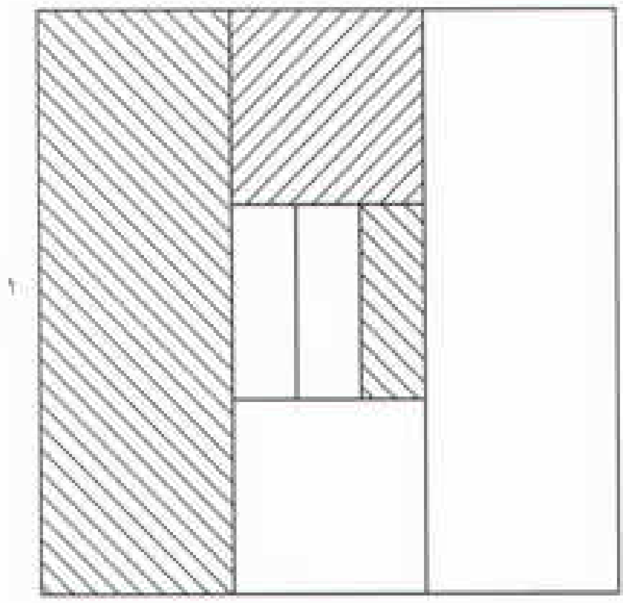
$S_n \to 0$

$x_n \to 0$

بازی با حد

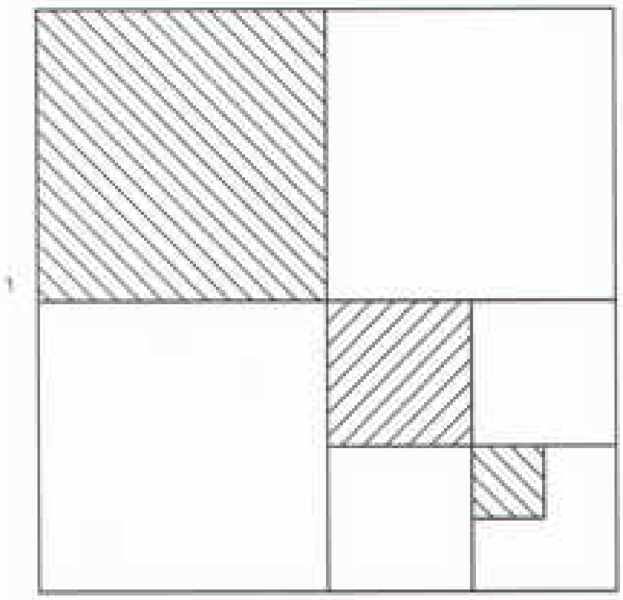
۱) در شکل ۱۹ـ۲ مربعی به ضلع واحد رسم شده است. با توجه به نحوه‌ی سایه زدن قسمت‌هایی از شکل، دوبار دیگر، مستطیل مجاور آخرین مستطیل سایه زده شده را به سه قسمت مساوی تقسیم کنید و یک قسمت را سایه بزنید (این که کدام قسمت را سایه بزنید مهم است!)

فرض کنید عمل سایه زدن قسمت‌ها مرتباً ادامه پیدا کند. مساحت تمام قسمت‌های سایه زده شده را حساب کنید.



شکل ۱۹ـ۲

۲) در شکل ۲۰ـ۲ نیز مربعی به ضلع واحد رسم شده است. مطابق شکل، دوبار دیگر مربع مقابل آخرین مربع سایه زده شده را به چهار مربع کوچک‌تر تقسیم و یک قسمت را سایه بزنید. مساحت تمام قسمت‌های سایه زده شده را حساب کنید.



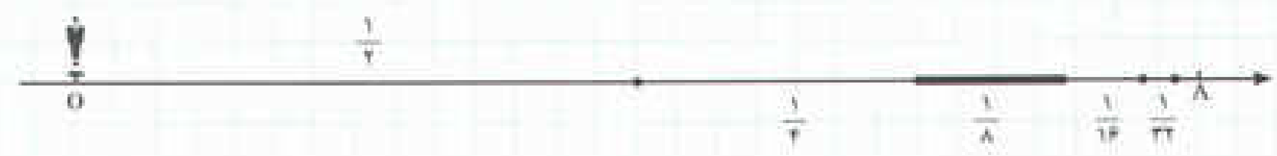
شکل ۲۰ـ۲

فعالیت ۳ـ۲

یک مثال تاریخی از حد

مسئله‌ی زنون: متحرکی از نقطه‌ی O، روی یک خط مستقیم، شروع به حرکت می‌کند و قصد دارد به نقطه‌ی A، به فاصله‌ی واحد از O، برسد. این متحرک هربار مسیری به **طول نصف فاصله‌اش تا نقطه‌ی A** را طی می‌کند و بعد کمی استراحت می‌نماید! (شکل ۲۱ـ۲)

۱) مسافتی را که این متحرک هربار طی می‌کند، x فرض کنید و سه مقدار دیگر x را، با توجه به شکل ۲۱ـ۲ بنویسید.



شکل ۲۱ـ۲

۲) آیا این متحرک به نقطه‌ی A می‌رسد؟ چرا؟

۳) فرض کنید f(x) فاصله‌ی این متحرک تا نقطه‌ی O باشد. جدول ۸ــ۲ را کامل کنید.

۴) با توجه به جدول ۸ــ۲، وقتی x به صفر نزدیک می‌شود، مقدارهای f(x) به چه عددی نزدیک می‌شود؟

۵) در این مثال، آیا x مساوی صفر می‌شود؟

۶) آیا هیچ یک از مقدارهای f(x) مساوی یک هست؟

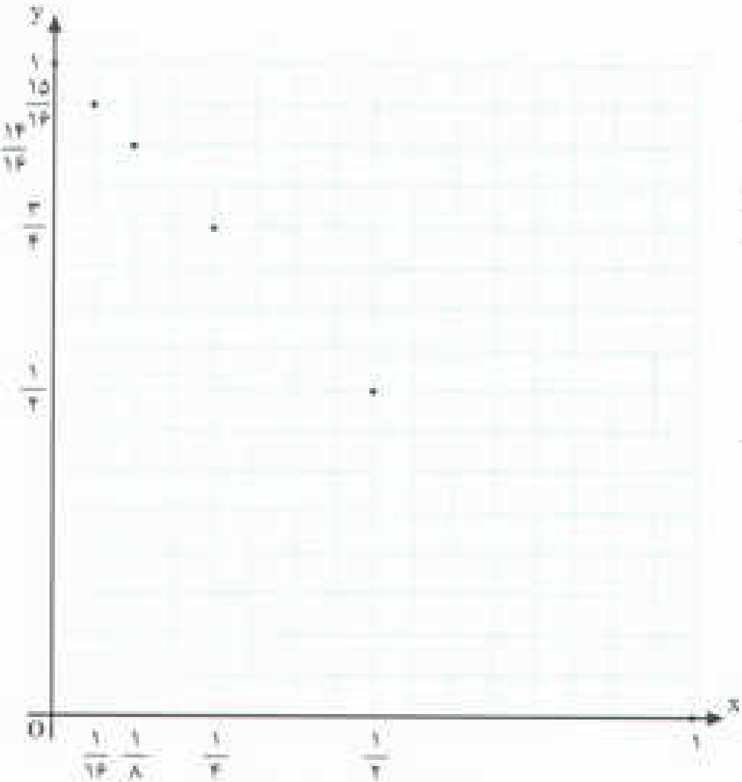
در این مثال، f(x) هرگز مساوی یک نمی‌شود ولی هرچه بخواهیم به یک نزدیک می‌شود، البته به شرطی که x را به اندازه‌ی کافی به صفر نزدیک کنیم. ریاضی‌دان‌ها، این مطلب را با نماد ریاضی زیر نمایش می‌دهند.

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1$$

(بخوانید : حد f(x) وقتی x به صفر میل می‌کند مساوی یک است)[1]

جدول ۸ــ۲

x	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	...
f(x)	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$		$\frac{15}{16}$			...



شکل ۲۲ــ۲ــ نمودار y = f(x)

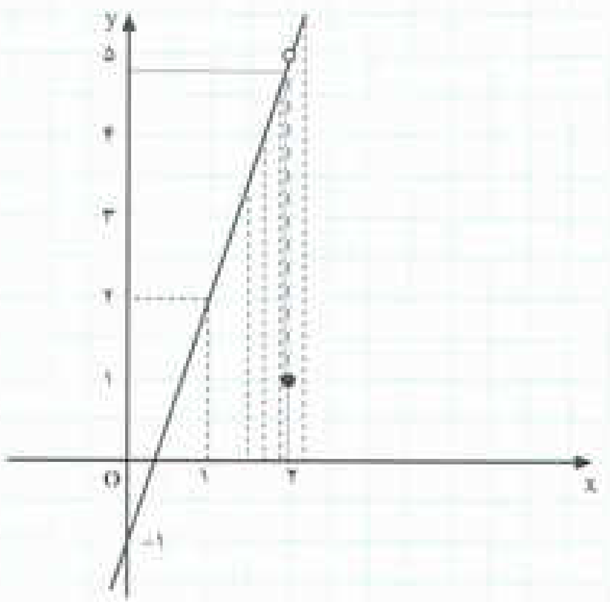
۲ــ۱ــ۲ــ حد تابع: در مطالعه‌ی تابع‌ها، مثلاً با ضابطه‌ی y = f(x)، در بسیاری از موارد، لازم است بدانیم وقتی x به عدد معینی، مثلاً a میل می‌کند، f(x) چگونه تغییر می‌کند، و آیا مقدارهای f(x) به عدد مشخصی میل می‌کند یا نه؟ در این بخش به این موضوع می‌پردازیم.

فعالیت ۴ــ۲

تابع $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی زیر داده شده است.

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & , \ x \neq 2 \\ 1 & , \ x = 2 \end{cases}$$

نمودار این تابع نیز در شکل ۲۳ــ۲ رسم شده است.



شکل ۲۳ــ۲

۱ــ lim سه حرف اول واژه‌ی limit به معنی حدّ است.

۱) مقدارهای f(x) را برای xهایی که در جدول مقابل داده شده‌اند محاسبه و جدول ۹ــ۲ را کامل کنید.

جدول ۹ــ۲

x	...	۱	۱/۵	۱/۷	۱/۹	۱/۹۹	→ ۲ ←	...	۲/۰۱	۲/۱	۲/۵	۳	...
f(x)=۳x-۱	...	۲				۴/۹۷	...	...	۵/۰۳			۸	...

۲) در این جدول x به چه عددی میل می‌کند؟

۳) وقتی x به عدد ۲ میل کند، مقدار f(x) ها، به چه عددی نزدیک می‌شوند؟

پاسخ :

۴) وقتی x نقطه‌های روی نمودار به عدد ۲ نزدیک می‌شوند، f(x) یا y این نقطه‌ها به چه عددی نزدیک می‌شوند؟

همان‌طور که می‌بینید f(x)ها به عدد ۵ نزدیک می‌شوند، در این حالت می‌گوییم :

> حد f(x) وقتی x به عدد ۲ میل می‌کند مساوی ۵ است
>
> و می‌نویسیم : $\lim\limits_{x\to ۲} f(x) = ۵$

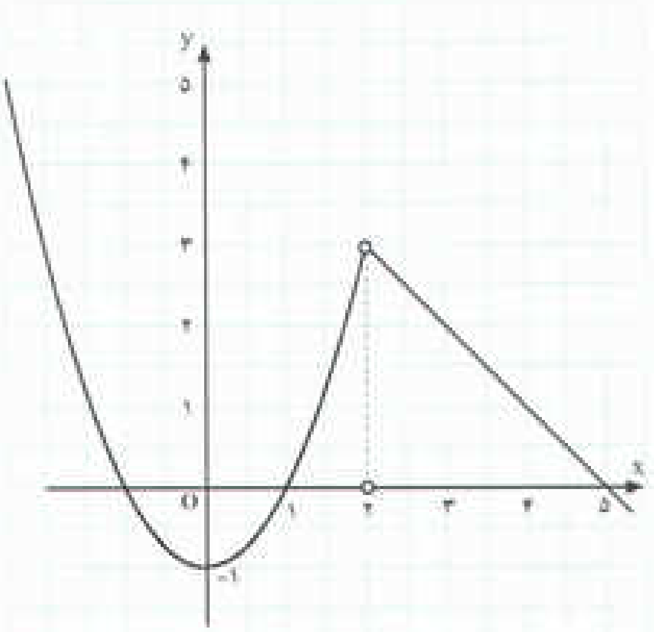
۵) آیا با تغییر مقدار f(۲) ، مقدار حد f(x) ، وقتی x → ۲ ، تغییر پیدا می‌کند؟

فعالیت ۵ــ۲

تابع $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی

$$f(x) = \begin{cases} x^۲ - ۱ & , \quad x < ۲ \\ ۵ - x & , \quad x > ۲ \end{cases}$$

تعریف شده و نمودار آن نیز در شکل ۲۴ــ۲ رسم شده است.



شکل ۲۴ــ۲

۱) با توجه به ضابطه‌ی f جدول ۱۰ــ۲ را کامل کنید.

جدول ۱۰ــ۲

x	...	۱	۱/۵	۱/۷	۱/۹	۱/۹۹	... ۲ ...	۲/۰۱	۲/۱	۲/۵	۳	...
f(x)							... ...					

۲) با میل کردن x به عدد ۲، مقدارهای f(x) چگونه تغییر می‌کنند؟ آیا به عدد مشخصی میل می‌کنند؟

۳) آیا رابطه‌ی روبه‌رو درست است؟ $\lim\limits_{x\to ۲} f(x) = ۳$

۴) به کمک نمودار تابع، حد تابع f را وقتی x → ۲ بررسی کنید.

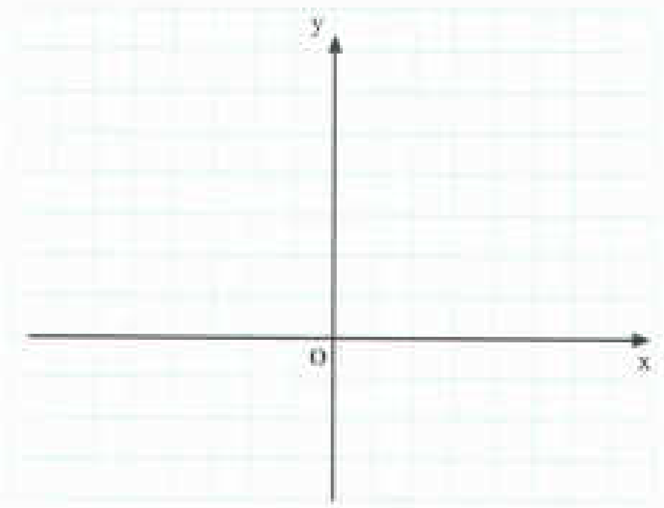
۵) آیا نمودار هم درستی رابطه روبه‌رو را نشان می‌دهد؟

کار در کلاس ۳ـ۲

تابع f با ضابطه‌ی زیر داده شده است :

$$f(x)=\begin{cases} ۲x+۶ & , \quad x<-۱ \\ ۳-x & , \quad x>-۱ \end{cases}$$

۱) نمودار $y=f(x)$ را در شکل (۲۵ـ۲) رسم کنید.



شکل ۲۵ـ۲

۲) حد $f(x)$ را وقتی $x\to -۱$ به‌دست آورید.

۳) با تشکیل جدول تغییرات x، جدول ۱۱ـ۲، برای مقدارهایی که به عدد ۱ـ میل می‌کنند، حد تابع را، وقتی $x\to -۱$، به دست آورید.

جدول ۱۱ـ۲

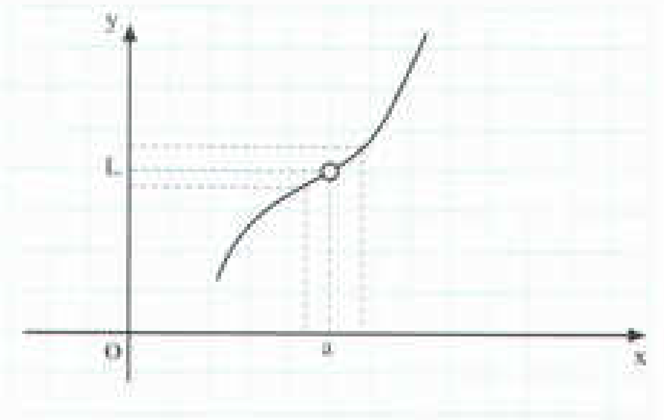
x	... ۱ـ ...
f(x)	

۴) آیا نمودار و جدول هر دو، نشان می‌دهند که :

$$\lim_{x\to -۱} f(x)=۴$$

۳ـ۱ـ۲ـ تعریف حد تابع: تابع f را که در همسایگی I از عدد a (یعنی در یک بازه‌ی باز I شامل عدد a) تعریف شده است (مگر احتمالاً در a) درنظر می‌گیریم. گوییم حد تابع f، وقتی متغیر x به عدد a میل می‌کند، برابر عدد L است درصورتی که بتوانیم f(x) را هرچه بخواهیم به L نزدیک کنیم، به شرط آن که x را به قدر کافی به عدد a نزدیک کرده باشیم. این مطلب با نماد ریاضی زیر نمایش داده می‌شود :

$$\lim_{x\to a} f(x)=L$$



شکل ۲۶ـ۲

مثلاً، با توجه به آنچه تاکنون بررسی کرده‌ایم :

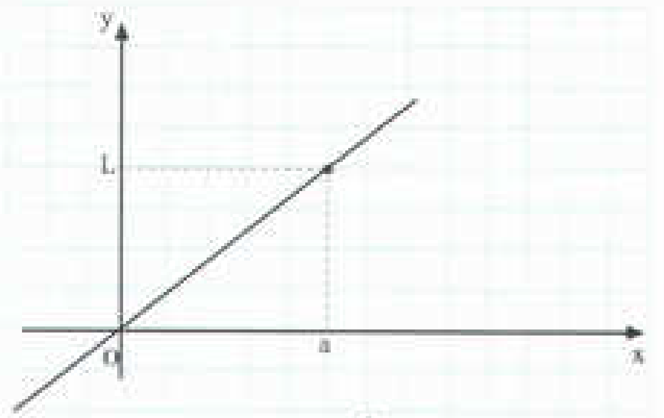
$$\lim_{x\to ۲}(۳x-۱)=۵$$

ضمناً، از آنچه تاکنون بررسی کرده‌ایم به نکته‌های زیر پی می‌بریم.

نکته‌ی ۱: وجود حد تابع f، وقتی $x\to a$، به معین بودن یا نبودن تابع در نقطه‌ی $x=a$ بستگی ندارد. لذا، حالت‌های زیر قابل تشخیص است :

الف) تابع f، وقتی $x\to a$، حد دارد ولی f در a تعریف نشده است (شکل ۲۶ـ۲).

ب) تابع f، وقتی $x\to a$، حد دارد و f در a تعریف شده است (شکل‌های ۲۷ـ۲ و ۲۸ـ۲ـ الف).

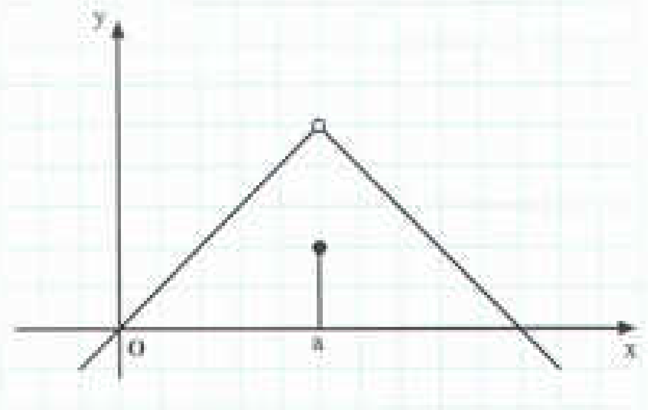


شکل ۲۷ـ۲

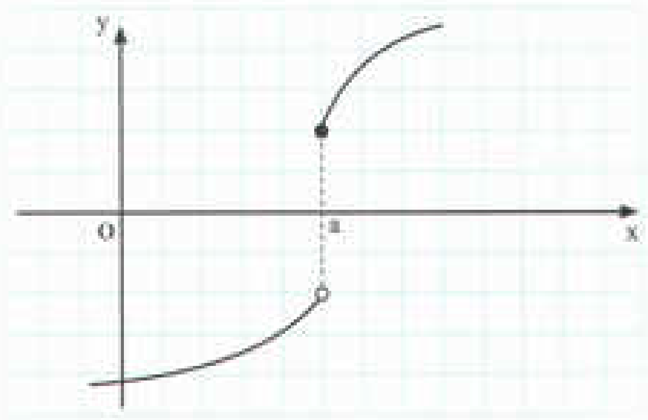
ب) تابع f، وقتی $x \to a$، حد ندارد. این حالت در بخش بعد مورد بررسی قرار می‌گیرد (شکل ۲۸ـ۲ـ ب).

نکته‌ی ۲: اگر تابع f، وقتی $x \to a$ دارای حد L باشد آنگاه حد $f(x)-L$، وقتی $x \to a$، مساوی صفر است و بالعکس.

نکته‌ی ۳: اگر تابع f، وقتی $x \to a$، دارای حد L باشد حد f وقتی $x \to a^-$ یا $x \to a^+$ نیز وجود دارد و مساوی L است.



شکل ۲۸ـ۲ـ الف



شکل ۲۸ـ۲ـ ب

تمرین

۱ـ تابع $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x) = 3x^2 - 1$ تعریف شده است. در مورد حد این تابع، وقتی $x \to 1$، تحقیق کنید (جدول ۱۲ـ۲).

جدول ۱۲ـ۲

x	
f(x)	

۲ـ تابع $g: \mathbb{R} - \{-1\} \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی زیر تعریف شده است:

$$g(x) = x^2 + 1 , \quad x \neq -1$$

در رفتار این تابع (یعنی حد داشتن یا نداشتن) وقتی $x \to -1$ تحقیق کنید (جدول ۱۳ـ۲).

جدول ۱۳ـ۲

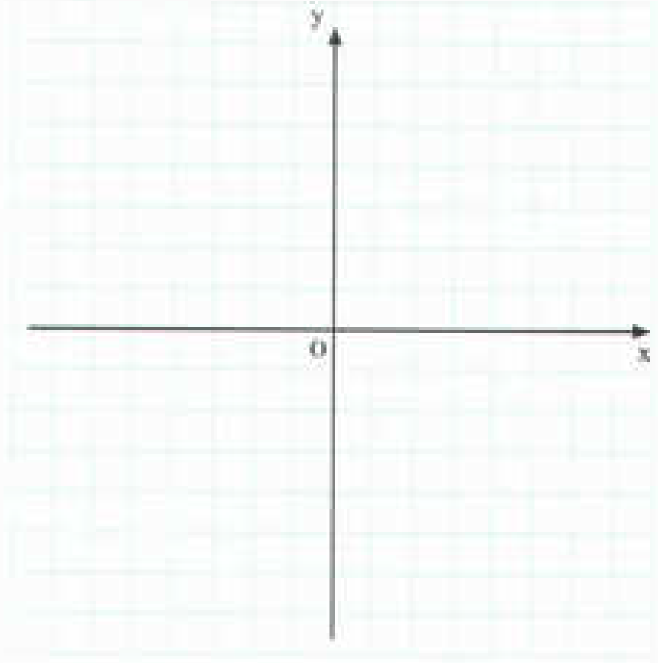
x	
g(x)	

۳ــ تابع $h:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ به‌صورت زیر تعریف شده است.

$$h(x) = \begin{cases} x^{۲}, & x \le -۲ \\ ۲ - x, & x > -۲ \end{cases}$$

الف) مقدار $\lim\limits_{x \to -۲} h(x)$ را حساب کنید.

ب) آیا مقداری که به‌دست آورده‌اید با $h(-۲)$ برابر است؟ نمودار تابع h در شکل ۲۹ــ۲ را رسم کنید.

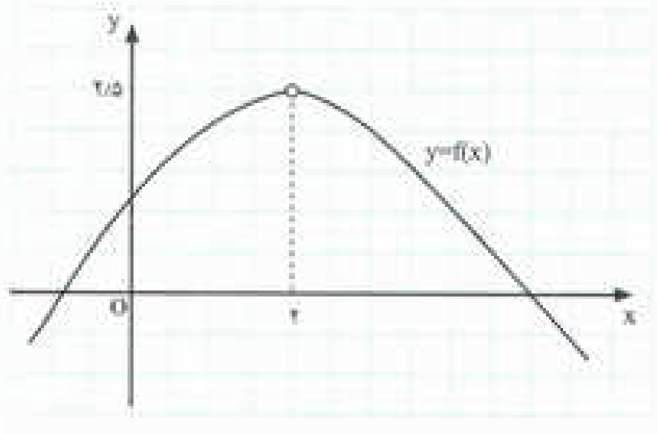


شکل ۲۹ــ۲

۴ــ با توجه به نمودار شکل ۳۰ــ۲ مقدار

$$\lim_{x \to ۲} f(x)$$

را تعیین کنید.

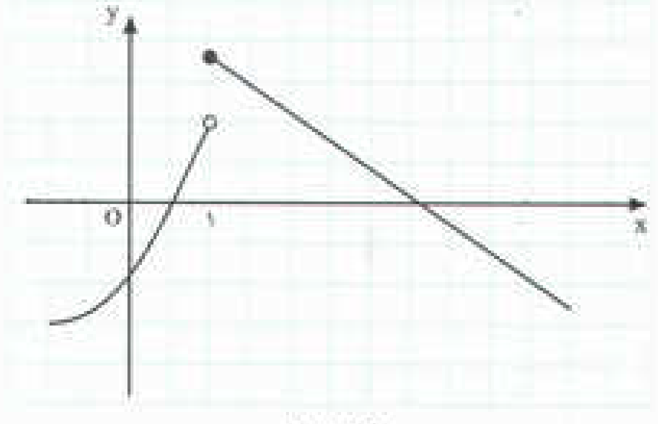


شکل ۳۰ــ۲

۵ــ با توجه به نمودار شکل ۳۱ــ۲ آیا

$$\lim_{x \to ۱} f(x)$$

وجود دارد؟



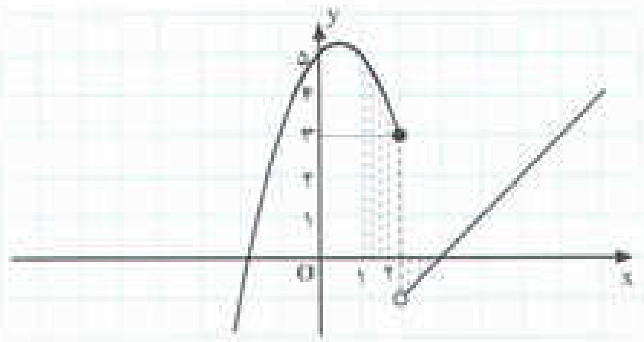
شکل ۳۱ــ۲

۴ـ۱ـ۲ـ حد چپ و حد راست یک تابع: معمولاً برای تعیین حد بعضی از تابع‌ها، مانند $[x]$ یا $\frac{|x|}{x}$ در $x=\text{۰}$، باید حد چپ و حد راست آن‌ها را مورد بررسی قرار داد.

تابع $f:R \to R$ با ضابطه‌ی زیر تعریف شده است:

$$f(x)=\begin{cases} \text{۵}+x-x^{\text{۲}}, & x \le \text{۲} \\ x-\text{۳}, & x > \text{۲} \end{cases}$$

نمودار $y=f(x)$ نیز در شکل ۳۲ـ۲ رسم شده است.



شکل ۳۲ـ۲

جدول ۱۴ـ۲ مقدارهای $f(x)$ را وقتی $x \to \text{۲}^-$ نشان می‌دهد.

جدول ۱۴ـ۲

x	…	۱	۱/۵	۱/۸	۱/۹	۱/۹۹	…	۲
$f(x)=\text{۵}+x-x^{\text{۲}}$	…	۵	۴/۲۵	۳/۵۶	۳/۰۹	۳/۰۲۹۹	…	؟

با توجه به جدول ۱۴ـ۲، و y نقطه‌ها نتیجه می‌گیریم:

حد $f(x)$ وقتی $x \to \text{۲}^-$ برابر با ۳ است.

این مطلب را با نماد ریاضی زیر نشان می‌دهیم:

$$\lim_{x \to \text{۲}^-} f(x)=\text{۳}$$

جدول ۱۵ـ۲ نیز مقدارهای $f(x)$ را، وقتی $x \to \text{۲}^+$، نشان می‌دهد.

جدول ۱۵ـ۲

x	۲	…	۲/۰۱	۲/۱	۲/۳	۲/۵	۳	…
$f(x)=x-\text{۳}$		…	۰/۹۹−	۰/۹−	۰/۷−	۰/۵−	۰	…

با توجه به جدول ۱۵ـ۲، و y نقطه‌های روی نمودار، نتیجه می‌گیریم:

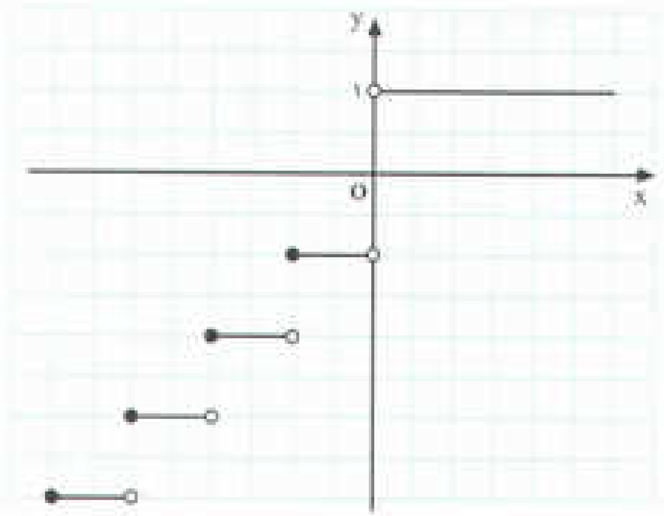
حد $f(x)$ وقتی $x \to \text{۲}^+$ برابر با ۱− است.

این مطلب را با نماد ریاضی زیر نشان می‌دهیم:

$$\lim_{x \to \text{۲}^+} f(x)=-\text{۱}$$

با توجه به این که حد چپ و حد راست تابع f وقتی $x \to \text{۲}$ برابر نیستند نتیجه می‌گیریم که تابع f، وقتی $x \to \text{۲}$، حد ندارد.

فعالیت ۶ـ۲



شکل ۳۳ـ۲

تابع f با ضابطه‌ی زیر تعریف شده و قسمتی از نمودار آن نیز رسم شده است.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x}, & x>۰\\ [x], & x<۰\end{cases}$$

۱) با توجه به نمودار این تابع (شکل ۳۳ـ۲)، حدس می‌زنید وقتی $x \to ۰^-$ مقدارهای تابع به چه عددی میل می‌کنند؟

$\lim\limits_{x \to ۰^-} f(x) = ?$

۲) با توجه به تعریف تابع قدرمطلق، وقتی $x>۰$ مقدار f(x) چیست؟

۳) حد f(x)، وقتی $x \to ۰^+$، چیست؟

$\lim\limits_{x \to ۰^+} f(x) = ?$

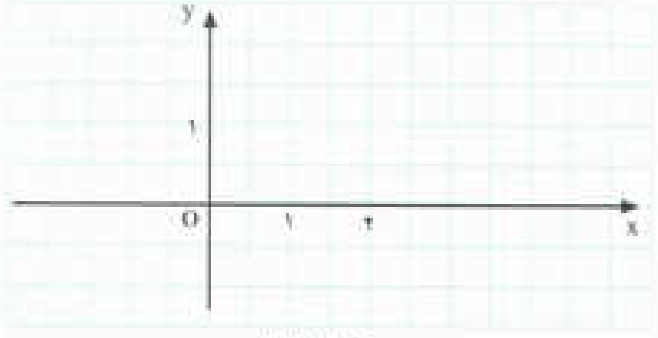
۴) با توجه به مرحله‌های ۱ و ۳، وقتی $x \to ۰$، آیا مقدارهای f(x) به یک عدد مشخص میل می‌کنند؟

۵) آیا این تابع، وقتی $x \to ۰$، حد دارد؟ چرا؟

> اگر حد چپ و حد راست یک تابع در یک نقطه متفاوت باشند آن تابع در آن نقطه حد ندارد.

۶) با توجه به نمودار این تابع می‌توانید بگویید این تابع در چه نقاطی حد ندارد؟

تمرین ۲ـ۲



شکل ۳۴ـ۲

۱ـ تابع f به‌صورت زیر تعریف شده است :

$$f(x)=\begin{cases}x, & x\geq ۱\\ [x], & x<۱\end{cases}$$

الف) نمودار $y=f(x)$ را در بازه‌ی $[۰,۲]$ رسم کنید (شکل ۳۴ـ۲).

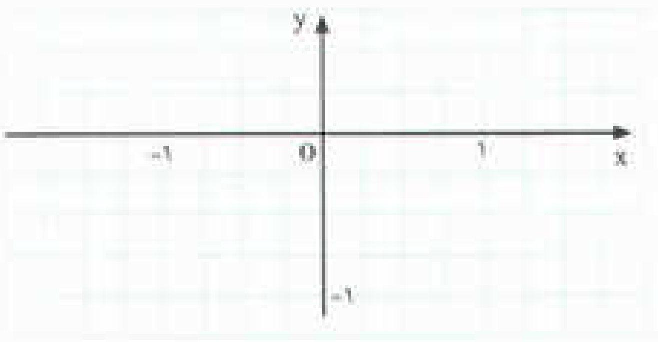
ب) مطلوب است محاسبه‌ی $\lim\limits_{x \to ۱^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to ۱^-} f(x)$.

ج) آیا تابع f، وقتی $x \to ۱$، حد دارد؟

۲ــ تابع f به‌صورت زیر تعریف شده است. در رفتار این تابع وقتی $x \to 0$ تحقیق کنید.

$$f(x) = \begin{cases} [x], & x > 0 \\ \dfrac{x}{|x|}, & x < 0 \end{cases}$$

(راهنمایی: نمودار تابع را در $[-1,1]$ رسم کنید (شکل ۳۵ــ۲)).

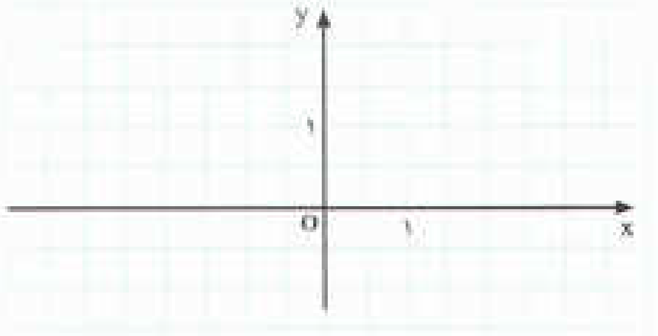


شکل ۳۵ــ۲

۳ــ فرض کنید تابع f به‌صورت زیر تعریف شده است.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & , \quad x > 0 \\ x - a & , \quad x < 0 \end{cases}$$

مقدار a را طوری تعیین کنید که $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ وجود داشته باشد. سپس مقدار این حد را بنویسید و نمودار تابع را رسم کنید (شکل ۳۶ــ۲).



شکل ۳۶ــ۲

آزمون پایانی (۱)

۱ــ در شکل ۳۷ــ۲ مربعی به ضلع ۴ سانتی‌متر رسم شده است. وسط ضلع‌های مجاور مربع نیز به هم وصل شده‌اند. پاسخ دهید :

الف) مساحت مربع $A'B'C'D'$ چقدر است؟

ب) مساحت قسمت سایه زده شده (مثلث $A'BB'$) چقدر است؟

۲ــ مجدداً وسط ضلع‌های مربع $A'B'C'D'$ شکل مسئله‌ی قبل را به هم وصل کرده‌ایم و مطابق شکل ۳۸ــ۲ یک گوشه‌ی آن را سایه زده‌ایم و این کار را روی مربع جدید تکرار کرده‌ایم و... با توجه به این مطلب، مجموع زیر را حساب کنید.

$$۲+۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۸}+\cdots=$$

این مجموع با مساحت قسمت‌های سایه زده شده چه رابطه‌ای دارد؟

۳ــ فرض کنید :

$$f(x)=\begin{cases} a-x^{۲}\ , & x>۱ \\ x^{۲}\ , & x<۱ \end{cases}$$

اگر تابع f در $x=۱$ حد داشته باشد، مقدار a برابر چیست؟

۴ــ فرض کنید :

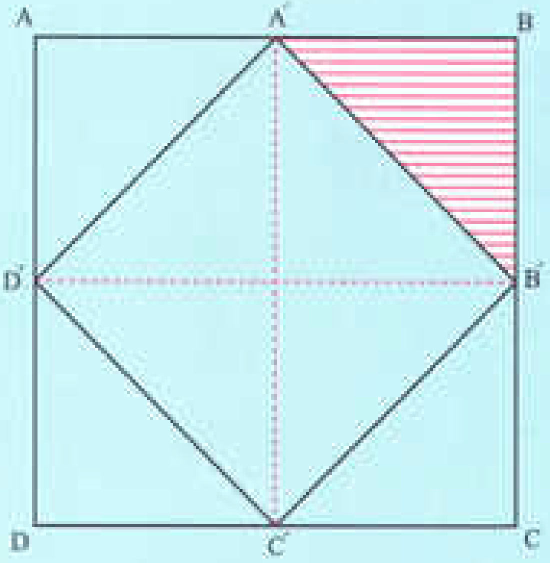
$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^{۲}-۴}{x-۲}\ , & x>۲ \\ ۳ & x=۲ \\ x-۱ & x<۲ \end{cases}$$

حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید :

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x)+f(۲)+\lim_{x\to ۲^+} f(x)$$

۵ــ مقدار $\lim\limits_{x\to ۲^+}\dfrac{[x]-۲}{[x]+۲}$ را به‌دست آورید.

محل پاسخ به سؤالات آزمون پایانی



شکل ۳۷ــ۲

شکل ۳۸ــ۲

بخش دوم

فصل دوم

پیوستگی

هدف کلی

شناسایی توابع پیوسته و حل مسائل آن

هدف‌های رفتاری: انتظار می‌رود فراگیر پس از پایان این فصل بتواند:

۱ــ تابع پیوسته را تعریف کند.

۲ــ با استفاده از قضیه‌های پیوستگی، حد تابع را در نقطه‌های موردنظر حساب کند.

۳ــ نقطه‌های ناپیوستگی تابع‌ها را تعیین کند.

۴ــ مسائل پیوستگی را به‌طور نسبی حل کند.

پیش‌آزمون (۲)

۱ــ واژه‌هایی که زیر آن‌ها خط کشیده شده است به چه معنی هستند؟

الف) راه‌آهن ایران از آذربایجان غربی به راه‌آهن اروپا پیوسته است.

ب) گرمای آب رادیاتور ماشین به‌طور ناپیوسته خنک می‌شود.

پ) کامپیوتر مسائل گسسته را مورد بررسی قرار می‌دهد.

ت) یک منحنی بدون بریدگی یا گسستگی، پیوسته است.

ث) واژه‌های وصل، فصل، متصل و منفصل به چه معنا هستند؟

۲ــ ویژگی عمده‌ی یک تابع چیست؟

۳ــ تابع f به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$f(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$$

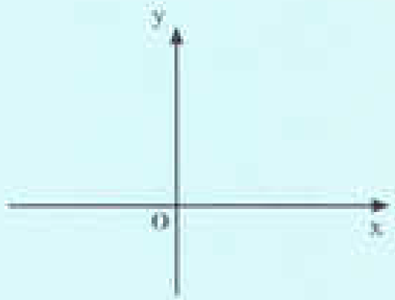
نمودار این تابع را رسم کنید.

۴ــ نمودار تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=x-[x]$، (شکل ۴۰ــ۲)، در چه نقاطی بریدگی دارد؟ برای این تابع چه نامی پیشنهاد می‌کنید؟

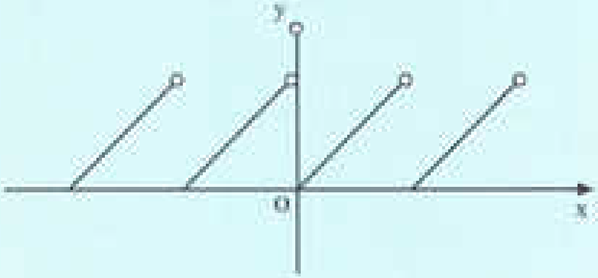
۵ــ دامنه‌ی تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ را به‌دست آورید. آیا تساوی زیر درست است؟

$$f(\cos x)=\begin{cases}\sin x\ , & 0\le x\le 1\\ -\sin x\ , & -1\le x<0\end{cases}$$

محل پاسخ به سؤالات پیش‌آزمون



شکل ۳۹ــ۲



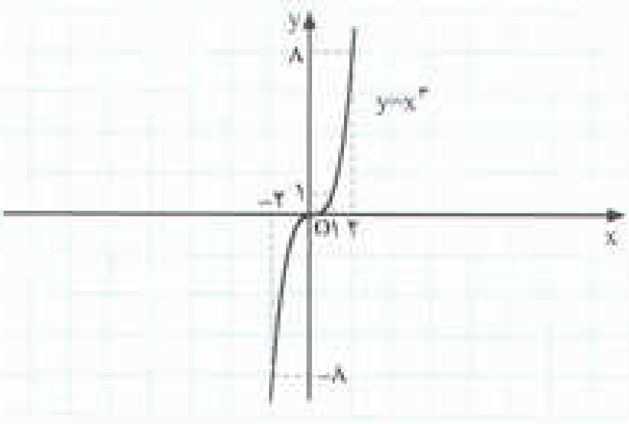
شکل ۴۰ــ۲

۲ـ۲ـ پیوستگی

پیوستگی تابع رابطه‌ی بسیار نزدیکی با مفهوم حد تابع دارد.

ابتدا پیوستگی تابع را در یک نقطه مورد بررسی قرار می‌دهیم.

مثال ۱: تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=x^3$ و نمودار آن را در شکل ۴۱ـ۲ درنظر می‌گیریم. این تابع برای تمام اعداد حقیقی تعریف شده است، یعنی $D_f=\mathbb{R}$. بنابراین، برای هر $a\in\mathbb{R}$ نقطه‌ی $A(a,f(a))$ روی نمودار $y=f(x)$ قرار دارد. ضمناً همان‌طور که ملاحظه می‌شود این نمودار در هیچ نقطه‌ای بریدگی ندارد. به عبارت دیگر، منحنی $y=f(x)$ **یک‌تکه (یا پیوسته)** است. لذا، تابع $y=x^3$ را **پیوسته** نامیم.



شکل ۴۱ـ۲

> **به‌طور کلی، اگر نمودار یک تابع در هیچ نقطه‌ای از دامنه‌ی تعریفش بریدگی نداشته باشد پیوسته است.**

اکنون مقدار تابع f و حد آن را در یک نقطه، مثلاً $x=1$، به‌دست می‌آوریم:

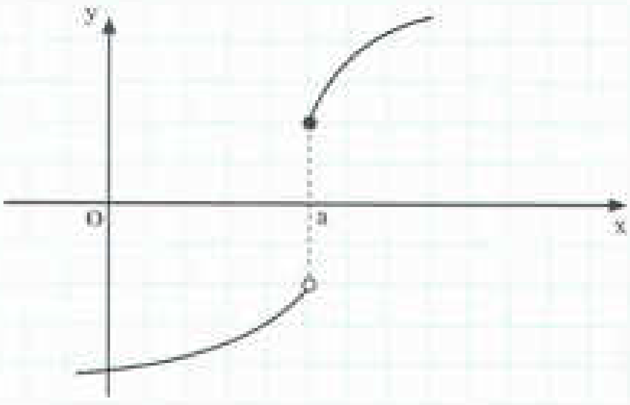
$$f(1)=1^3=1,\quad \lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}(x^3)=1^3=1$$

به‌طوری که دیده می‌شود در این مثال $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)=1$.

این ویژگی در هر نقطه‌ی دیگر نیز برقرار است. به‌طور مثال:

$$\lim_{x\to2}f(x)=f(2)=2^3=8$$

$$\lim_{x\to-1}f(x)=f(-1)=(-1)^3=-1$$



نمودار یک تابع ناپیوسته

شکل ۴۲ـ۲

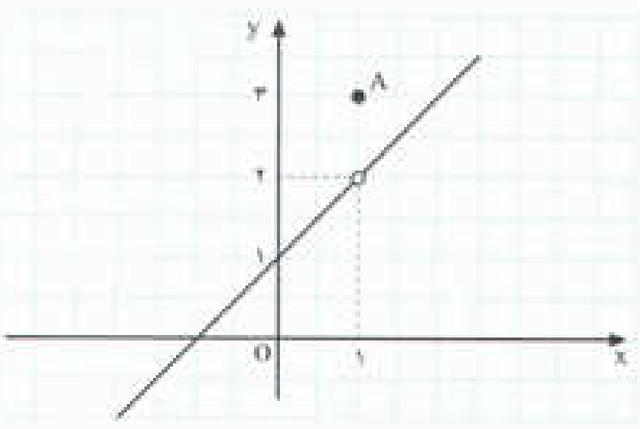
مثال ۲: تابع f با ضابطه‌ی

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1}, & x\neq1\\ 3, & x=1\end{cases}$$

را درنظر می‌گیریم. دامنه‌ی این تابع $D_f=\mathbb{R}$ و با توجه به اتحاد مزدوج، برای هر $x\neq1$ ، یا $(x-1)\neq0$ داریم:

$$f(x)=\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=x+1$$

یعنی، $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\neq1\\ 3, & x=1\end{cases}$. نمودار این تابع را در شکل ۴۳ـ۲ ملاحظه می‌کنید. دیده می‌شود که این نمودار در $x=1$ دارای **گسستگی (ناپیوستگی)** است. ضمناً، با توجه به ضابطه‌ی



شکل ۴۳ـ۲

تابع داریم:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2$$

امّا، مقدار حد با مقدار $f(1)$ برابر نیست و همین باعث گسستگی در نمودار تابع شده است. اگر $f(1)$ را به‌جای ۳ عدد ۲ تعریف کنیم تابع در نقطه‌ی $x=1$ پیوسته خواهد شد.

با توجه به آنچه توضیح داده شد تعریف زیر را ارائه می‌دهیم.

تعریف ۱: تابع f را در نقطه‌ی $x=a$ **پیوسته** گوییم، هرگاه:

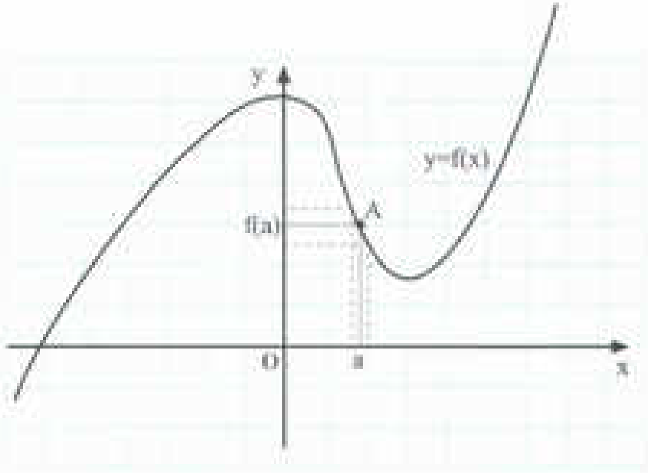
۱) تابع f در $x=a$ تعریف شده باشد؛

۲) وقتی $x \to a$ تابع f حد داشته باشد؛

۳) حد تابع f وقتی $x \to a$ با مقدار تابع در a برابر باشد.

یعنی،

$$(*) \quad \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

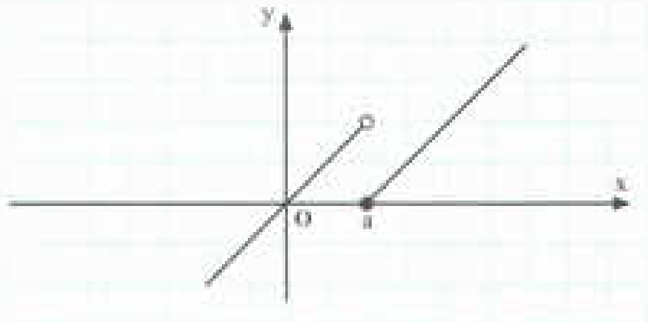


شکل ۴۴ــ۲

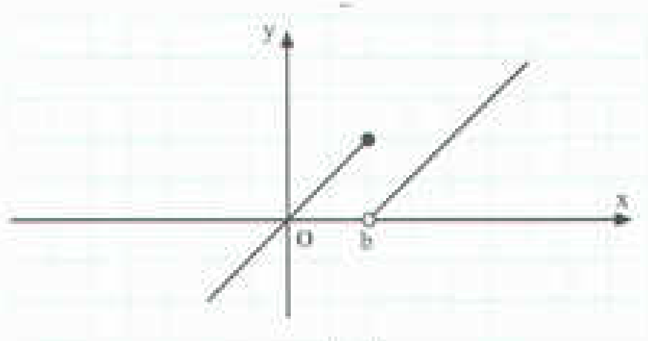
نکته‌ی ۱: رابطه‌ی (*) سه شرط (۱)، (۲) و (۳) را داراست. چرا؟

تعریف ۲: اگر f در **هر** نقطه از دامنه‌اش پیوسته باشد گوییم f پیوسته است. اگر $D_f = [a,b]$ برای پیوستگی f در a کافی است داشته باشیم $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ (**پیوستگی از راست** در a) و برای پیوستگی در b کافی است داشته باشیم $\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$ (**پیوستگی از چپ** در b) (شکل ۴۵ــ۲).

نکته‌ی ۲: اگر تابع f پیوسته باشد و $a \in D_f$، اولاً f در a حد دارد، ثانیاً این حد مساوی $f(a)$ است. پس، برای به‌دست آوردن حد f، وقتی $x \to a$، کافی است در ضابطه‌ی تابع f به‌جای متغیر مقدار a را قرار دهید.



(الف)



(ب)

شکل ۴۵ــ۲

۱ــ۲ــ۲ــ قضیه‌های پیوستگی: همان‌طور که تاکنون متوجه شده‌اید تعیین حد تابع به‌وسیله‌ی جدول یا رسم نمودار دارای مشکلاتی است. امّا برای تابع‌هایی که پیوسته هستند مقدار حد، وقتی x به نقطه‌ای از دامنه‌ی تعریف میل می‌کند، به‌سادگی به‌دست می‌آید. لذا، شناختن تابع‌های پیوسته در این مورد کمک شایانی می‌کند.

در زیر چند قضیه در مورد تابع‌های پیوسته بیان می‌کنیم. اثبات این قضیه‌ها با توجه به تعریف یک تابع پیوسته آسان است ولی هدف ما استفاده و به‌کار بردن این قضیه‌ها می‌باشد.

مثال‌ها (در رابطه با قضیه‌ی ۱)

۱) اگر c یک عدد ثابت باشد تابع ثابت $f(x)=c$ پیوسته است. درنتیجه، مثلاً می‌توان نوشت:

$$\lim_{x\to ۱} ۲ = ۲,\quad \lim_{x\to -۱} \sqrt{۳} = \sqrt{۳},\quad \lim_{x\to a} c = c.$$

۲) تابع $f(x)=۲x+۱$ پیوسته است، لذا در هر نقطه حد دارد. مثلاً،

$$\lim_{x\to -۱} (۲x+۱) = ۲(-۱)+۱ = -۱,$$

$$\lim_{x\to \sqrt{۳}} (۲x+۱) = ۲\sqrt{۳}+۱.$$

قضیه‌ی ۱: فرض کنید $a_n, \dots, a_1, a_0$ عددهای حقیقی باشند. تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0,\quad x\in\mathbb{R}$$

که یک **تابع چندجمله‌ای** نامیده می‌شود، بر $\mathbb{R}$ پیوسته است.

۳) اگر n عددی طبیعی باشد و $f(x)=x^n$ این تابع پیوسته است. لذا، مثلاً، داریم:

$$\lim_{x\to -۲} x^۳ = (-۲)^۳ = -۸,\quad \lim_{x\to -۱} x^۵ = (-۱)^۵ = -۱.$$

۴) رابطه‌های زیر نیز از پیوستگی تابع‌های چندجمله‌ای نتیجه می‌شوند.

$$\lim_{x\to ۳} (۲x^۳ - x^۲ + ۷x - ۵) = ۲(۳)^۳ - (۳)^۲ + ۷(۳) - ۵$$

$$= ۵۴ - ۹ + ۲۱ - ۵ = ۶۱$$

$$\lim_{x\to \sqrt{۲}} (۲x^۴ - x^۲ + ۵) = ۲(\sqrt{۲})^۴ - (\sqrt{۲})^۲ + ۵$$

$$= ۸ - ۲ + ۵ = ۱۱.$$

قضیه‌ی ۲: تابع‌های $f(x)=\sin x$ و $g(x)=\cos x$ بر $\mathbb{R}$ پیوسته هستند.

قضیه‌ی ۳: اگر تابع‌های f و g در $x=a$ پیوسته باشند تابع‌های $f+g$ و $f-g$ نیز در $x=a$ پیوسته‌اند.

نکته: قضیه‌ی ۳ برای هر تعداد با پایان (متناهی) تابع پیوسته برقرار است.

مثال‌ها (در رابطه با قضیه‌های ۲ و ۳)

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}} \sin x = \sin\frac{\pi}{۲} = ۱$$

$$\lim_{x\to ۰} \cos x = \cos ۰ = ۱$$

با توجه به پیوستگی حاصل‌جمع دو تابع پیوسته می‌توان نوشت:

$$\lim_{x\to \pi} (\cos x + \sin x) = \cos\pi + \sin\pi = -۱ + ۰ = -۱$$

$$\lim_{x\to \pi} (\cos x + x) = \cos\pi + (\pi) = -۱ + \pi$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}} (\cos^۲ x - ۲\sin x) = (\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲ - ۲\sin(\frac{\pi}{۴})$$

$$= \frac{۱}{۲} - ۲\times\frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{۱}{۲} - \sqrt{۲}$$

قضیه‌ی ۴: اگر تابع‌های f و g در $x=a$ پیوسته باشند تابع $(fg)(x)=f(x).g(x)$ در $x=a$ پیوسته است.

نکته: قضیه‌ی ۴ برای تعدادی با پایان (متناهی) تابع پیوسته برقرار است.

مثال‌ها (در رابطه با قضیه‌ی ۴)

۱) با استفاده از پیوستگی حاصل‌ضرب دو تابع پیوسته، می‌توان گفت که تابع‌های زیر پیوسته‌اند:

الف) $f(x)=x\sin x$ ب) $g(x)=x^{۲}\cos x$

۲) با توجه به قضیه‌ها می‌توان نوشت:

الف) $\lim\limits_{x\to ۰}(۲x^{۲}-۸x+۱)\sin x=(۰-۰+۱)\sin ۰$

$=۱\times ۰=۰$

ب) $\lim\limits_{x\to ۳}\left[(۲x+۱)(x^{۲}-۴)(x+۳)\right]$

$=(۲\times ۳+۱)(۳^{۲}-۴)(۳+۳)$

$=۷\times ۵\times ۶=۲۱۰$

پ) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۴}}\sin^{۲}x\cos x(۱+\sin x)=(\frac{\sqrt{۲}}{۲})^{۲}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}(۱+\frac{\sqrt{۲}}{۲})$

$=\frac{۱}{۲}\times(\frac{\sqrt{۲}}{۲}+\frac{۱}{۲})=\frac{۱}{۴}(\sqrt{۲}+۱)$

قضیه‌ی ۵: اگر تابع‌های f و g در $x=a$ پیوسته باشند تابع با ضابطه‌ی $h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ در $x=a$، به شرط آن‌که $g(a)\neq ۰$، پیوسته است.

مثال ۱: تابع $f(x)=\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$، وقتی $k\in Z$ و $x\neq(۲k+۱)\frac{\pi}{۲}$ پیوسته است.

مثال ۲: تابع $f(x)=\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$، وقتی $k\in Z$ و $x\neq k\pi$، پیوسته است.

مثال‌ها (در رابطه با قضیه‌ی ۵)

۱) تابع‌های زیر بر $\mathbb{R}$ پیوسته‌اند (زیرا، تابع‌هایی که در مخرج کسرها قرار دارند پیوسته و همواره غیرصفرند و تابع‌هایی که در صورت کسرها قرار دارند پیوسته‌اند):

الف) $f(x)=\frac{۲x^{۲}-۱}{۱+x^{۲}}$

ب) $g(x)=\frac{x^{۲}-۸x-۳}{۲+\sin x}$

پ) $h(x)=\frac{x\sin x}{۱+\cos^{۲}x}$

۲) با توجه به پیوستگی تابع‌های مثال بالا، می‌توان نوشت:

الف) $\lim\limits_{x\to -۱}\frac{۲x^{۲}-۱}{۱+x^{۲}}=\frac{۲(-۱)^{۲}-۱}{۱+(-۱)^{۲}}=\frac{۲-۱}{۱+۱}=\frac{۱}{۲}$

ب) $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{x^{۲}-۸x-۳}{۲+\sin x}=\frac{۰^{۲}-۸\times ۰-۳}{۲+\sin ۰}=\frac{-۳}{۲}=-۱/۵$

پ) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}}\frac{x\sin x}{۱+\cos^{۲}x}=\frac{\frac{\pi}{۲}\times\sin\frac{\pi}{۲}}{۱+\cos^{۲}\frac{\pi}{۲}}=\frac{\frac{\pi}{۲}\times ۱}{۱+۰}=\frac{\pi}{۲}$

قضیه‌ی ۶: اگر تابع f در a و تابع g در f(a) پیوسته باشد تابع gof در a پیوسته است.

۲ـ۲ـ۲ـ مسائل پیوستگی: در این‌جا مثال‌هایی از پیوستگی تابع‌ها، می‌آوریم. نحوه‌ی حل این مثال‌ها می‌تواند نمونه‌ای برای حل مسائل مشابه باشد.

مثال‌ها

۱) تابع f با ضابطه‌ی زیر تعریف شده است:

$$f(x)=\begin{cases}1-x, & x<2\\ x^2-5, & x\geq 2\end{cases}$$

آیا تابع f در $x=2$ پیوسته است؟

۲) تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}[x], & x>2\\ |2x-2|, & x<2\end{cases}$ داده شده است. $f(2)$ را چنان تعریف کنید که تابع f در $x=2$ پیوسته باشد.

۳) تابع f با ضابطه‌ی زیر تعریف شده است:

$$f(x)=\begin{cases}2x-b, & x\leq 2\\ x^3-2, & x>2\end{cases}$$

عدد b را چنان تعیین کنید که تابع f در نقطه‌ی $x=2$ پیوسته باشد. جواب خود را امتحان کنید.

مثال‌ها (در رابطه با قضیه‌ی ۶)

۱) با توجه به پیوستگی تابع‌های چندجمله‌ای و تابع‌های sinx و cosx، می‌توان گفت که تابع‌های زیر پیوسته‌اند:

الف) $\sin(x-\frac{\pi}{2})$ ب) $\cos x^2$ پ) $\cos(2x+\pi)$

۲) با توجه به پیوستگی تابع‌های بالا داریم:

الف) $\lim\limits_{x\to 0}\sin(x-\frac{\pi}{2})=\sin(0-\frac{\pi}{2})=-1$

ب) $\lim\limits_{x\to 0}\cos x^2=\cos 0^2=\cos 0=1$

پ) $\lim\limits_{x\to \pi}\cos(2x+\pi)=\cos 3\pi=-1$

حل ۱: اولاً $f(2)=2^2-5=-1$، ثانیاً، با توجه به پیوسته بودن هر تابع چندجمله‌ای،

$$\lim_{x\to 2^-}f(x)=\lim_{x\to 2^-}(1-x)=1-2=-1$$
$$\lim_{x\to 2^+}f(x)=\lim_{x\to 2^+}(x^2-5)=2^2-5=-1$$

بنابراین، $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=-1$ و تابع f در $x=2$ پیوسته است.

حل ۲: داریم: $\lim\limits_{x\to 2^+}[x]=2$ و $\lim\limits_{x\to 2^-}|2x-2|=2$.

بنابراین، کافی است تعریف کنیم:

$$f(2)=2.$$

حل ۳: صرف‌نظر از تعریف این تابع، چون هر تابع چندجمله‌ای پیوسته است، داریم:

$$\lim_{x\to 2^-}f(x)=\lim_{x\to 2^-}(2x-b)=2\times 2-b=4-b$$
$$\lim_{x\to 2^+}f(x)=\lim_{x\to 2^+}x^3-2=2^3-2=6$$

بنابراین، باید داشته باشیم:

$$4-b=6 \quad\Rightarrow\quad b=-2$$

واضح است که به‌ازای $b=-2$ داریم:

$$\lim_{x\to 2^-}f(x)=4-(-2)=6=\lim_{x\to 2^+}f(x)=f(2)$$

یعنی تابع f در $x=2$ پیوسته است.

۴) تابع f با ضابطه‌ی زیر داده شده است :

$$f(x)=\begin{cases}3x+2 & x<-1\\ x^2-c & x>-1\end{cases}$$

هرگاه تابع f در $x=-1$ پیوسته باشد $f(-1)$ و c را بیابید.

حل ۴: کافی است c را چنان تعیین کنیم که تابع f در -1 حد داشته باشد و بعد $f(-1)$ را مقدار این حد تعریف کنیم.

$$\lim_{x\to -1^-} f(x)=3(-1)+2=-1$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x)=(-1)^2-c=1-c$$

بنابراین، باید داشته باشیم :

$$1-c=-1 \Rightarrow c=2 \Rightarrow f(-1)=-1$$

۵) تابع f با ضابطه‌ی زیر تعریف شده است :

$$f(x)=\begin{cases}2x-a & x<2\\ 5 & x=2\\ x^2+b & x>2\end{cases}$$

عددهای a و b را چنان تعیین کنید که تابع f در $x=2$ پیوسته باشد.

حل ۵: اولاً، $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=2\times 2-a=4-a$ ، ثانیاً، $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=2^2+b=4+b$. بنابراین، باید داشته باشیم :

$$4-a=5 \Rightarrow a=-1$$

$$4+b=5 \Rightarrow b=1$$

پیوستگی تابع f را در $x=2$ ، با توجه به مقدارهایی که برای a و b به‌دست آمد، امتحان کنید.

تمرین ۳ـ۲

۱ـ پیوستگی هریک از تابع‌های زیر را در نقطه‌ی داده شده تعیین کنید.

الف) $f(x)=\begin{cases}x^2+3x-1 \ , & x\geq 1\\ 4-x^2 \ , & x<1\end{cases}$ (در $x=1$)

ب) $f(x)=\begin{cases}\sin\frac{\pi}{2}x \ , & x>2\\ x^2-2x \ , & x\leq 2\end{cases}$ (در $x=2$)

پ) $f(x)=\begin{cases}x^2 \ , & x\leq 0\\ -x^2 \ , & x>0\end{cases}$ (در $x=0$)

ت) $f(x)=\begin{cases}|x-2| \ , & x\neq 2\\ 1 \ , & x=2\end{cases}$ (در $x=2$)

ث) $f(x)=\begin{cases}x-1 \ , & x>-1\\ -2 \ , & x=-1\\ 2x \ , & x<-1\end{cases}$ (در $x=-1$)

۲ـ اگر $f(x)=\begin{cases}x+2 \ , & x<1\\ a-2x \ , & x>1\end{cases}$ ، مقدار $f(1)$ چقدر باشد تا این تابع در $x=1$ پیوسته باشد؟

۳ـ تابع f با ضابطه‌ی زیر داده شده است :

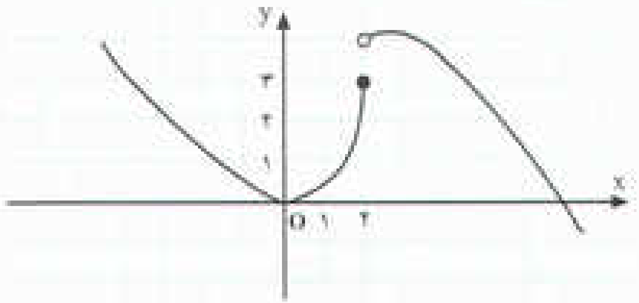
$$f(x)=\begin{cases}x^2+2a \ , & x>-2\\ 4 \ , & x=-2\\ 3x-2b \ , & x<-2\end{cases}$$

عددهای a و b را طوری تعیین کنید که تابع f در $x = -2$ پیوسته باشد.

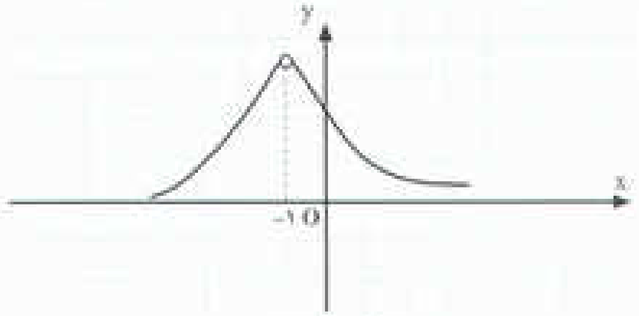
۴ــ آیا تابع f با ضابطه‌ی زیر در نقطه‌ی $x = 0$ پیوسته است؟

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 2 & , \quad x > 0 \\ [x] + 1 & , \quad x \leq 0 \end{cases}$$

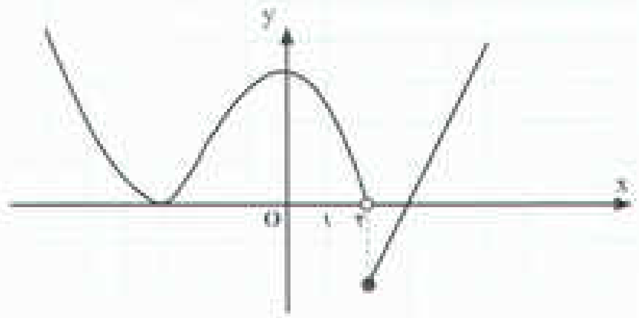
۵ــ با توجه به نمودارهای تابع های شکل ۴۶ـ۲، پیوستگی راست، پیوستگی چپ، و درنتیجه، پیوستگی در نقطه‌های مشخص شده را تعیین کنید.



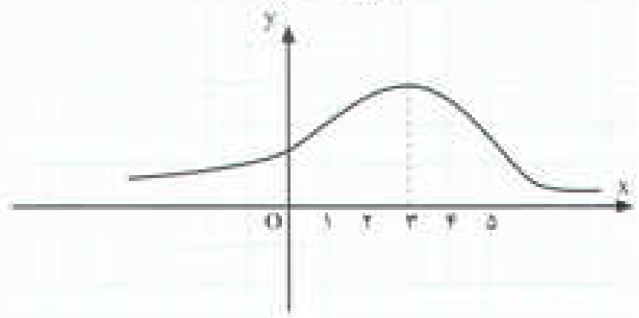
(الف) $x = 2$



(ب) $x = -1$



(پ) $x = 2$



(ت) $x = 3$

شکل ۴۶ـ۲

آزمون پایانی (۲)

محل پاسخ به سؤالات آزمون پایانی

۱ــ مجموعه‌ی نقطه‌هایی را که در آن‌ها تابع زیر پیوسته است، تعیین کنید.

$$f(x)=\frac{x-1}{x^2+x+1}$$

۲ــ تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{x+1}{x^2+x-2}$ در چه نقطه‌هایی ناپیوسته است؟

۳ــ تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=x-[x]$ در چه نقطه‌هایی گسسته است؟

۴ــ هزینه‌ی پست کالا از ایران به کانادا با تابع زیر تعریف می‌شود : (n عددی طبیعی است)

x ، کیلوگرم و هزینه به ریال است.

$$P(x)=\begin{cases}12000 & (0<x<1)\\ 12000+10^4\times 1 & 1\le x<2\\ 12000+10^4\times 2 & 2\le x<3\\ 12000+10^4\times 3 & 3\le x<4\\ 12000+10^4\times 4 & 4\le x<5\\ \vdots & \vdots\\ 12000+10^4\times n & n\le x<n+1\end{cases}$$

الف) هزینه‌ی پست ۴/۷ کیلوگرم کالا چقدر است؟

ب) در کدام یک از نقطه‌های ۲/۱، ۳، ۴/۲ و ۵ تابع P ناپیوسته است؟

۵ــ تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{|2-x|}{x-2}$ داده شده است. $f(2)$ را چنان تعریف کنید که در $x=2$ از چپ پیوسته باشد.

بخش دوم

فصل سوم

تعمیم حد

هدف کلی

تعیین حد تابع وقتی متغیر به $+\infty$ (یا $-\infty$) میل می‌کند. همچنین بررسی تابع‌هایی که حد آن‌ها، وقتی x به یک عدد حقیقی یا $\pm\infty$ میل می‌کند، $+\infty$ یا $-\infty$ است.

هدف‌های رفتاری: انتظار می‌رود فراگیر پس از پایان این فصل بتواند:

۱ــ حد در بینهایت را تعریف کند.

۲ــ حد بینهایت برای یک تابع را تعریف کند.

۳ــ حد تابع‌های کسری که صورت و مخرج آن‌ها، وقتی $x \to a$، به صفر میل می‌کنند را به‌دست آورد.

۴ــ قضیه‌ی فشردگی را در تعیین حد بعضی از تابع‌ها به‌کار برد.

پیش‌آزمون (۳)

۱ــ فرض کنید $f(x)=\frac{1}{x-2}$. اگر x برابر عددهای $2+1$، $2+\frac{1}{2}$، ... یا $2+\frac{1}{n}$ باشند مقدار f(x)، ۱، ۲، ... یا n خواهد شد. مثلاً:

$$f(2+\frac{1}{n})=\frac{1}{(2+\frac{1}{n})-2}=\frac{1}{\frac{1}{n}}=n$$

با توجه به شکل ۴۷ــ۲ وقتی n بزرگ و بزرگ‌تر می‌شود $2+\frac{1}{n}$ به چه عددی نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود؟ در چنین حالتی برای $f(2+\frac{1}{n})$ چه اتفاقی می‌افتد؟

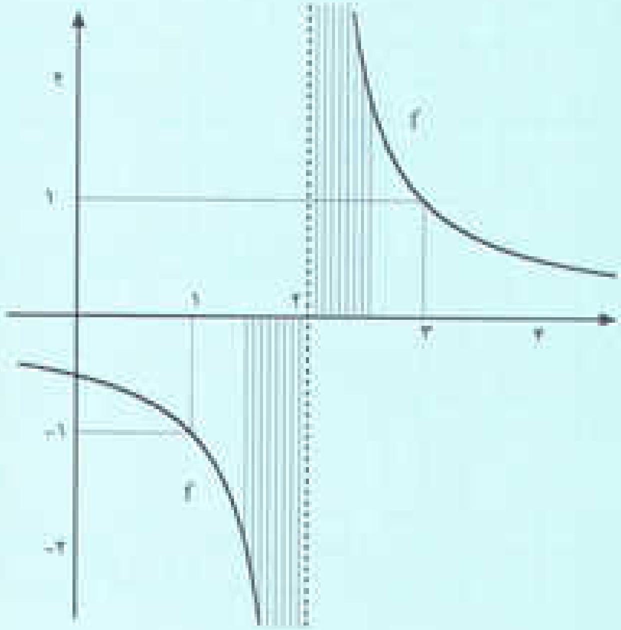
۲ــ اگر در سؤال ۱، x به‌صورت $2-\frac{1}{n}$ و با افزایش n، به عدد ۲ نزدیک شود $f(2-\frac{1}{n})$ چه وضعیتی دارد؟ توجه کنید که:

$$f(2-\frac{1}{n})=\frac{1}{(2-\frac{1}{n})-2}=\frac{1}{-\frac{1}{n}}=-n$$

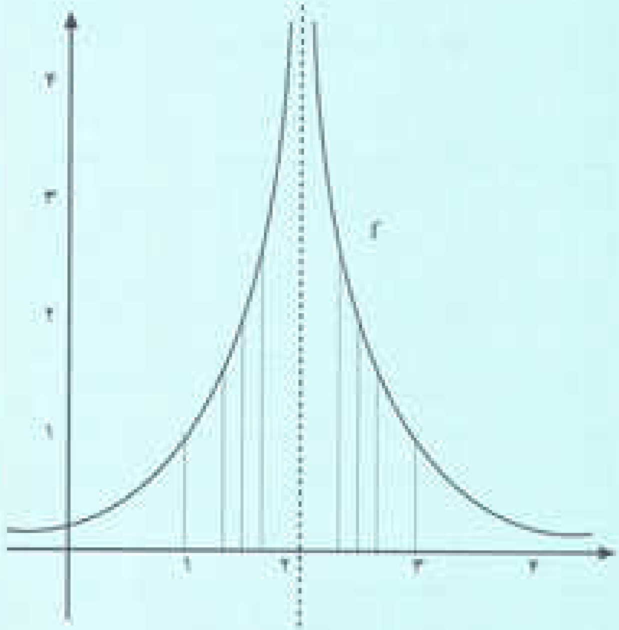
۳ــ اگر $f(x)=\frac{1}{(x-2)^2}$ و متغیر x به‌صورت $2+\frac{1}{n}$ یا $2-\frac{1}{n}$، با افزایش n، به عدد ۲ نزدیک و نزدیک‌تر شوند وضعیت f(x) چگونه خواهد بود؟ (راهنمایی: نشان دهید که $f(2-\frac{1}{n})=f(2+\frac{1}{n})=n^2$) (شکل ۴۸ــ۲).

۴ــ فرض کنید $f(x)=\sqrt{x}$ و x عددهای ۱، ۴، ۹، ۱۶، ...، n^2 را اختیار کند، مقدار f(x) چه عددهایی خواهد بود؟ وقتی n بزرگ و بزرگ‌تر شود f(x) چگونه تغییر می‌کند؟

محل پاسخ به سؤالات پیش‌آزمون



شکل ۴۷ــ۲



شکل ۴۸ــ۲

۳ـ۲ـ تعمیم حد

تاکنون در حدهایی که مورد بررسی قرار داده‌ایم، عدد a و عدد L هر دو، عدد حقیقی بوده‌اند. در این قسمت می‌خواهیم ببینیم اگر a یا L بینهایت شوند چگونه باید عمل کرد.

فعالیت ۷ـ۲

تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\frac{1}{x^2}$ $(x\neq 0)$، را درنظر بگیرید.

(به مثال روبه‌رو نیز توجه کنید.)

۱) جدول ۱۶ـ۲ را کامل کنید.

جدول ۱۶ـ۲

x	...	−۰/۵	−۰/۱	−۰/۰۱	→	۰	←	۰/۰۱	۰/۱	۰/۵	...
$f(x)=\frac{1}{x^2}$	...	۴								۴	...

۲) در جدول ۱۶ـ۲، x به چه عددی میل می‌کند؟

۳) با نزدیک شدن x به صفر، f(x)ها چگونه تغییر می‌کنند؟

۴) آیا می‌توان گفت که اگر x به عدد صفر بسیار نزدیک باشد، f(x) می‌تواند از هر عدد مثبت بزرگی بزرگ‌تر شود؟

۵) با توجه به آنچه در مورد $+\infty$ می‌دانید، درست است که بگوییم حد f(x)، وقتی $x\to 0$، $+\infty$ است؟

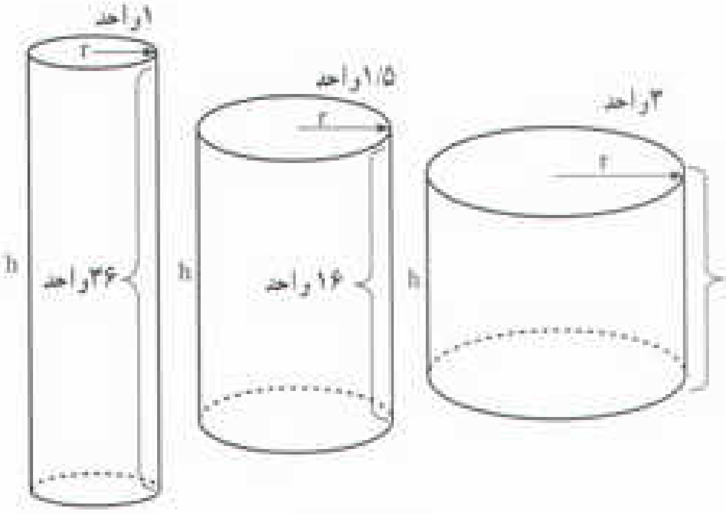
۶) آیا درست است که بنویسیم؟ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$

۷) نمودار $y=f(x)$ در شکل ۵۰ـ۲ رسم شده است آیا از این نمودار هم معلوم می‌شود که وقتی x به عدد صفر میل می‌کند f(x) به $+\infty$ میل می‌کند؟

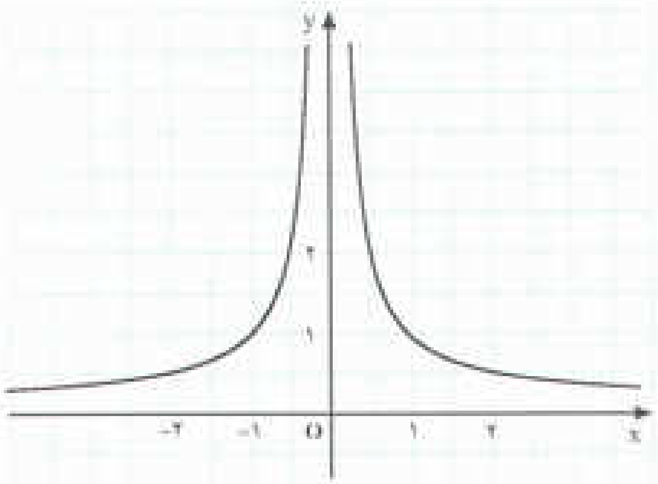
۸) آیا درست است که بگوییم :

> $\frac{1}{x^2}$ را هرچه بخواهیم می‌توانیم بزرگ کنیم به شرط آن‌که x را به‌قدر کافی به صفر نزدیک کنیم.

مثال: فرض کنید استوانه‌ای به شعاع r و ارتفاع h داریم که حجم آن عدد ثابت ۱۰۸ است. یعنی $\pi r^2h=108 \Rightarrow r^2h\simeq 36$. واضح است که با تغییر شعاع، ارتفاع استوانه تغییر خواهد کرد. شکل ۴۹ـ۲ این بستگی را نشان می‌دهد.



شکل ۴۹ـ۲



شکل ۵۰ـ۲

فعالیت ۸ ـ ۲

تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{1}{x}\ (x\neq 0)$ ، را درنظر بگیرید.

۱) جدول ۱۷ـ۲ را کامل کنید.

جدول ۱۷ ـ ۲

x	$\cdots$	$-0/2$	$-0/1$	$-0/01$	$-0/001$	$\to 0 \leftarrow$	$0/0001$	$0/001$	$0/01$	$0/1$	$\cdots$
$f(x)=\frac{1}{x}$	$\cdots$			-100				1000			$\cdots$

۲) در جدول ۱۷ـ۲ متغیر x به چه عددی میل می‌کند؟

۳) با نزدیک شدن x به عدد صفر مقدارهای f(x) چگونه تغییر می‌کنند؟

۴) آیا می‌توان گفت وقتی x از چپ به عدد صفر نزدیک می‌شود f(x) به $-\infty$ میل می‌کند؟

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=\cdots$$

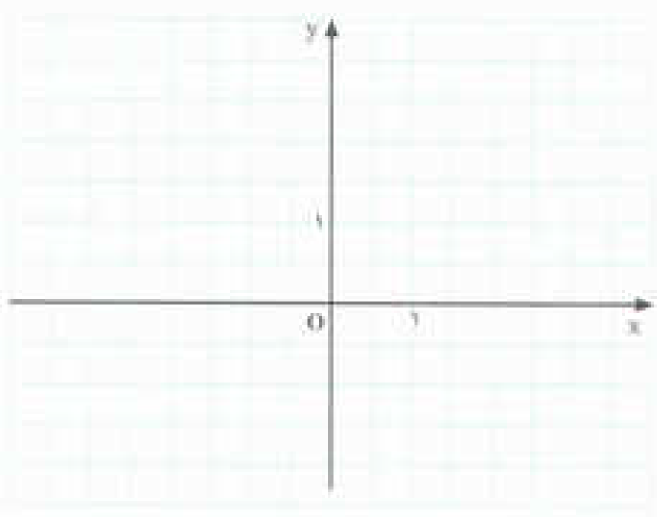
۵) آیا رابطه‌ی زیر درست است؟

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$$

۶) جدول ۱۸ـ۲ را کامل کنید.

جدول ۱۸ ـ ۲

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2
$f(x)$					تعریف نشده				



شکل ۵۱ ـ ۲

۷) نمودار $y=\frac{1}{x}$ را در دستگاه شکل ۵۱ ـ ۲ رسم کنید.

۸) به کمک نمودار $f(x)=\frac{1}{x}$ رفتار این تابع را، وقتی $x\to 0$ ، بررسی کنید.

۹) آیا نمودار نیز درستی نتایج مرحله‌های ۵ و ۶ را تأیید می‌کند؟

۱۰) آیا تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ ، وقتی $x\to 0$ حد دارد؟ چرا؟

تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ ، وقتی $x\to 0$ ، حد ندارد.

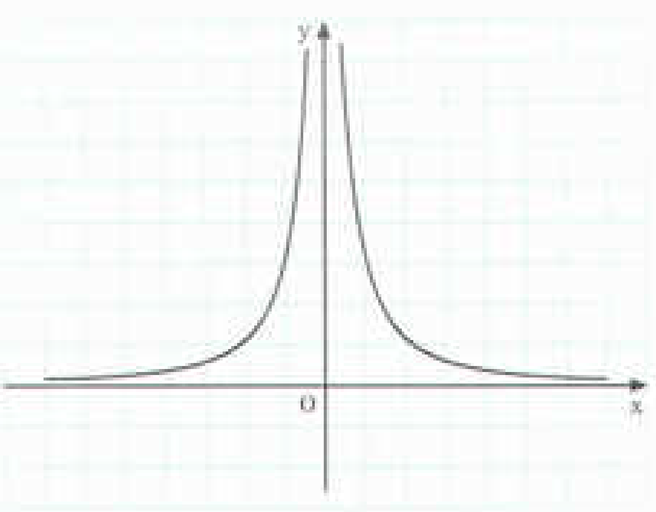
۱ـ۳ـ۲ـ تعریف (حدّ بینهایت): فرض کنید تابع f در بازه‌ی باز I که شامل عدد a است، مگر احتمالاً در a، تعریف شده باشد.

الف) حد تابع f، وقتی $x \to a$، $+\infty$ است هرگاه بتوانیم f(x) را از هر عدد بزرگ مثبتی، بزرگ‌تر کنیم، به شرط آن‌که x را به اندازه‌ی کافی به a نزدیک کرده باشیم.

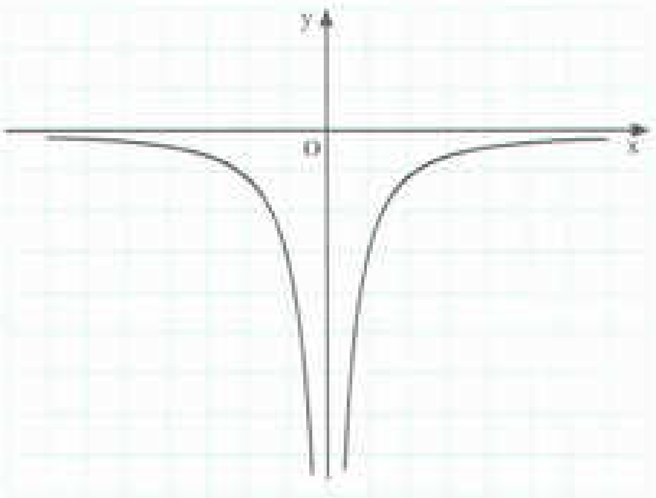
ب) حد تابع f، وقتی $x \to a$، $-\infty$ است هرگاه بتوانیم f(x) را از هر عدد بزرگ منفی، کوچک‌تر کنیم، به شرط آن که x را به اندازه‌ی کافی به a نزدیک کرده باشیم. مثلاً،

$$\lim_{x \to \circ} \frac{\text{۱}}{x^{\text{۲}}} = +\infty$$

$$\lim_{x \to \circ} \frac{-\text{۱}}{x^{\text{۲}}} = -\infty$$



شکل ۵۲ـ۲



شکل ۵۳ـ۲

مثال‌ها

۱. نشان دهید که

$$\lim_{x \to \text{۱}} \frac{\text{۱}}{(x-\text{۱})^{\text{۲}}} = +\infty$$

حل ۱: فرض کنید $X = x - \text{۱}$ واضح است که $x \to \text{۱}$ معادل است با $X \to \circ$ بنابراین،

$$\lim_{x \to \text{۱}} \frac{\text{۱}}{(x-\text{۱})^{\text{۲}}} = \lim_{X \to \circ} \frac{\text{۱}}{X^{\text{۲}}} = +\infty$$

۲. نشان دهید که

$$\lim_{x \to -\frac{\text{۱}}{\text{۲}}} \frac{-\text{۴}}{(\text{۲}x+\text{۱})^{\text{۲}}} = -\infty$$

حل ۲: می‌دانیم که $\text{۲}x + \text{۱} = \text{۲}(x + \frac{\text{۱}}{\text{۲}})$ و $x \to \frac{-\text{۱}}{\text{۲}}$ معادل است با $X = x + \frac{\text{۱}}{\text{۲}} \to \circ$ بنابراین،

$$\lim_{x \to -\frac{\text{۱}}{\text{۲}}} \frac{-\text{۴}}{(\text{۲}x+\text{۱})^{\text{۲}}} = \lim_{x \to -\frac{\text{۱}}{\text{۲}}} \frac{-\text{۴}}{\text{۴}(x+\frac{\text{۱}}{\text{۲}})^{\text{۲}}} = \lim_{X \to \circ} \frac{-\text{۱}}{X^{\text{۲}}} = -\infty$$

تمرین

حدهای زیر را بررسی کنید، در صورت وجود حد نامتناهی، آن حد را تعیین کنید.

الف) $\lim\limits_{x \to ۲} \dfrac{-۱}{(x-۲)^۲}$ ب) $\lim\limits_{x \to \frac{۱}{۳}} \dfrac{۹}{(۱-۳x)^۲}$

پ) $\lim\limits_{x \to ۴} \dfrac{-۱}{x-۴}$ ت) $\lim\limits_{x \to -\frac{۱}{۲}} \dfrac{۱}{۲x+۱}$

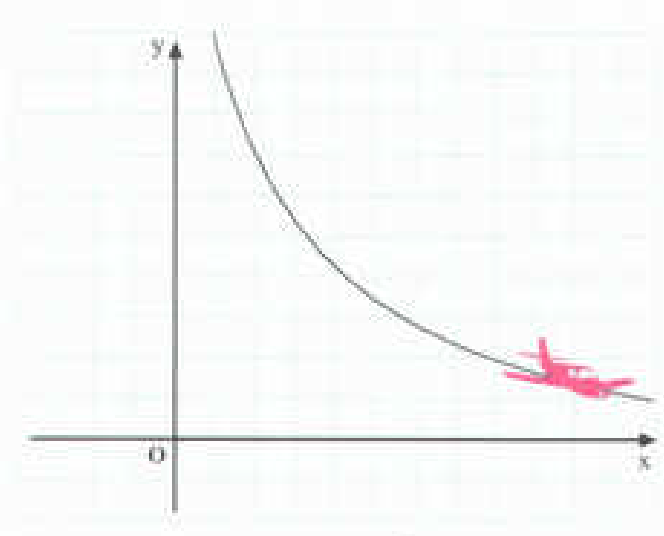
۲ــ۳ــ۲ــ حد در بینهایت: اینک می‌خواهیم مفهوم حد یک تابع را، وقتی $x \to +\infty$ یا $x \to -\infty$، بررسی کنیم.

فعالیت ۹ــ۲

تابع f با ضابطه‌ی زیر را درنظر می‌گیریم:

$$f(x) = \frac{۱}{x}, \quad x \neq ۰$$

می‌خواهیم رفتار این تابع را وقتی $x \to +\infty$ بررسی کنیم.



شکل ۵۴ــ۲

۱) جدول ۱۹ــ۲ را کامل کنید.

جدول ۱۹ــ۲

x	...	۱۰	۱۰۰	۱۰۰۰	۱۰۰۰۰	۱۰۰۰۰۰	...
$f(x)=\frac{۱}{x}$	...						...

۲) در جدول ۱۹ــ۲ متغیر x چگونه تغییر کرده است؟

۳) وقتی x به $+\infty$ میل می‌کند، $f(x)$ به چه عددی میل می‌کند؟

۴) آیا با میل کردن x به $+\infty$، $f(x)$ به صفر میل می‌کند؟

۵) آیا رابطه‌ی زیر برقرار است؟

$$(*)\quad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

۶) نمودار $y = \frac{1}{x}$ را در بازه‌ی $(0, +\infty)$ رسم کنید.

۷) با استفاده از نمودار $y = \frac{1}{x}$ حد $\frac{1}{x}$ را وقتی $x \to +\infty$ بررسی کنید.

۸) آیا نمودار هم تساوی رابطه‌ی(*) را تأیید می‌کند؟

کار در کلاس ۴ـ۲

تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{1}{x}$ ، $(x \neq 0)$ را درنظر می‌گیریم.

۱) جدول ۲۰ـ۲ را کامل کنید.

جدول ۲۰ـ۲

x	...	-۱۰۰۰۰۰۰	-۱۰۰۰۰۰	-۱۰۰۰۰	-۱۰۰۰	-۱۰۰	-۱۰
$f(x)=\frac{1}{x}$							

۲) در جدول ۲۰ـ۲ متغیر x چگونه تغییر می‌کند؟

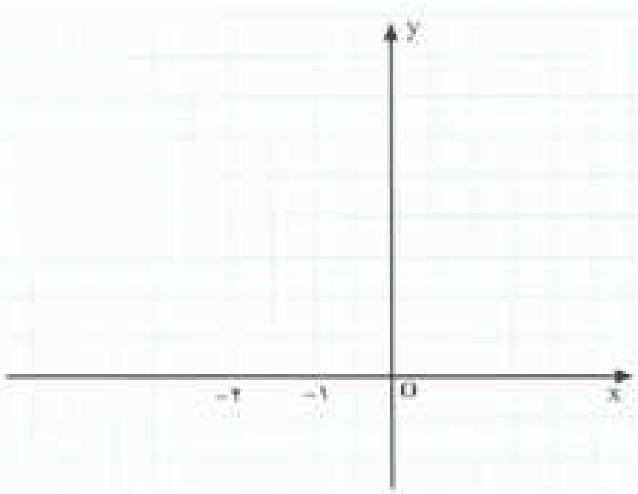
۳) آیا x به $-\infty$ میل می‌کند؟

۴) با میل کردن x به $-\infty$ ، f(x) چگونه تغییر کرده است؟

۵) آیا f(x) به صفر میل کرده است؟

۶) آیا رابطه‌ی زیر درست است؟

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$



شکل ۵۵ـ۲

۷) نمودار $y = \frac{1}{x}$ را در بازه‌ی $(-\infty, 0)$ و در شکل ۵۵ـ۲ رسم کنید.

۸) آیا نمودار هم نشان می‌دهد وقتی $x \to -\infty$ ، f(x) به صفر میل می‌کند؟

بنابراین آنچه مورد بررسی قرار گرفت :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x}}$$

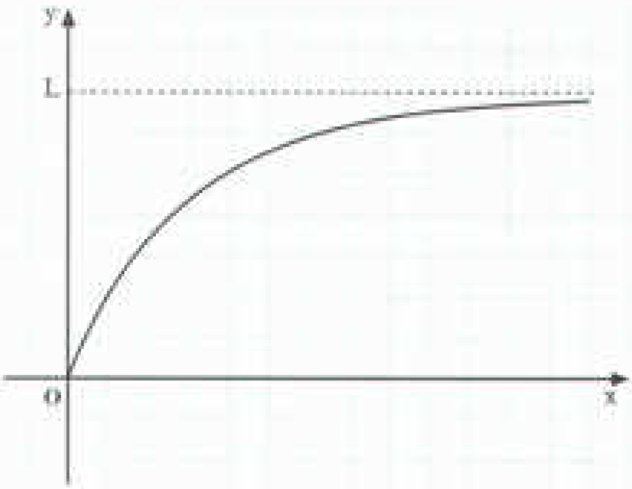
۳_۳_۲_ تعریف (حد در بینهایت)

الف) حد یک تابع وقتی $x \to +\infty$:

فرض کنید تابع f برای $x > a$ تعریف شده باشد. گوییم حد $f(x)$ وقتی $x \to +\infty$ مساوی عدد حقیقی L است در صورتی که بتوانیم $f(x)$ را هر چه‌قدر بخواهیم به L نزدیک کنیم به شرط آن‌که x را به قدر کافی بزرگ اختیار کرده باشیم.

ب) حد یک تابع وقتی $x \to -\infty$:

فرض کنید تابع f برای $x > a$ تعریف شده باشد. گوییم حد $f(x)$، وقتی $x \to -\infty$، مساوی عدد حقیقی L است در صورتی که بتوانیم $f(x)$ را هرچه‌قدر بخواهیم به L نزدیک کنیم به شرط آن‌که x را از هر عدد منفی کوچکی، کوچکتر کنیم (شکل ۵۶_۲).



شکل ۵۶_۲

مثلاً،

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{۱}{x} = ۰ \quad و \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{۱}{x} = ۰$$

لذا، اگر قرار دهیم $t = \frac{۱}{x}$ آن‌گاه (جدول‌های ۲۱_۲ و ۲۲_۲ ملاحظه شوند)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{۱}{x} = \lim_{t \to ۰^+} t = ۰$$

همچنین،

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{۱}{x} = \lim_{t \to ۰^-} t = ۰$$

از این مطلب می‌توان استفاده کرد و بسیاری از حدهای کسری را حساب کرد.

جدول ۲۱_۲

x	$t = \frac{۱}{x}$
۱	۱
۱۰	۰/۱
۱۰۰	۰/۰۱
۱۰۰۰	۰/۰۰۱
۱۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۱
۱۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۱

$$\boxed{\begin{array}{l} x \longrightarrow +\infty \\ t \longrightarrow ۰^+ \end{array}}$$

جدول ۲۲_۲

x	$t = \frac{۱}{x}$
-۱	-۱
-۱۰۰	-۰/۰۱
-۱۰۰۰	-۰/۰۰۱
-۱۰۰۰۰	-۰/۰۰۰۱
-۱۰۰۰۰۰۰	-۰/۰۰۰۰۰۱
$-۱۰^{۱۰}$	$-۱۰^{-۱۰}$

$$\boxed{\begin{array}{l} x \longrightarrow -\infty \\ t \longrightarrow ۰^- \end{array}}$$

الف) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{۲x - ۱}{۳ + ۴x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x(۲ - \frac{۱}{x})}{x(\frac{۳}{x} + ۴)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{۲ - \frac{۱}{x}}{\frac{۳}{x} + ۴}$$

$$= \lim_{t \to ۰^+} \frac{۲ - t}{۳t + ۴} = \frac{۲ - ۰}{۰ + ۴} = \frac{۱}{۲}$$

ب) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^۲}{x^۳ + ۱} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{۱}{x}}{۱ + \frac{۱}{x^۳}} = \lim_{t \to ۰^+} \frac{t}{۱ + t^۳}$$

$$= \frac{۰}{۱ + ۰} = ۰$$

ممکن است حد یک تابع وقتی $x \to +\infty$ و یا $x \to -\infty$ عددی حقیقی نباشد بلکه $+\infty$ یا $-\infty$ باشد. به فعالیت زیر توجه کنید.

فعالیت ۱۰ــ۲

تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = ۲x + ۵$ را درنظر می‌گیریم.

۱) مقدارهای $f(x)$ را، برای xهایی که در جدول (۲۳ــ۱) داده شده است، محاسبه کنید و در جدول بنویسید.

جدول ۲۳ــ۲

x	...	−۱۰۰۰۰۰	−۱۰۰۰۰	−۱۰۰	−۱۰	۰	۱۰	۱۰۰	۱۰۰۰۰	۱۰۰۰۰۰	...
$f(x)=۲x+۵$	...									۲۰۰۰۰۵	...

۲) هنگامی که متغیر x به قدر کافی بزرگ اختیار شود مقدار $f(x)$ چگونه است؟

۳) آیا با میل کردن x به $+\infty$، $f(x)$ به $+\infty$ میل می‌کند؟

۴) آیا با میل کردن x به $-\infty$، $f(x)$ هم به $-\infty$ میل می‌کند؟

۵) آیا رابطه‌های زیر صحیح است؟

$$\lim_{x \to +\infty} (۲x + ۵) = +\infty \quad , \quad \lim_{x \to -\infty} (۲x + ۵) = -\infty$$

کار در کلاس ۵ــ۲

فعالیت ۱۰ــ۲ را برای تابع $f(x) = -۳x + ۵$ تکرار کنید.

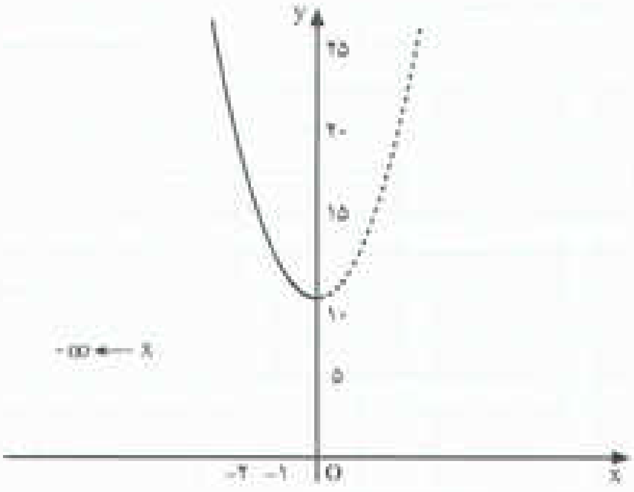
فعالیت ۱۱ــ۲

تابع $f(x) = ۲x^۲ + ۱۰$ را درنظر بگیرید.

۱) جدول ۲۴ــ۲ را کامل کنید.

جدول ۲۴ــ۲

x	...	−۱۰۰۰۰۰	−۱۰۰۰۰	−۱۰۰	−۱۰	۰	۱۰	...
$f(x)=۲x^۲+۱۰$	...							...



شکل ۵۷ـ۲

۲) وقتی $x \to -\infty$ مقدارهای $f(x)$ چگونه تغییر می‌کنند؟

۳) آیا وقتی $x \to -\infty$، $f(x)$ به $+\infty$ میل می‌کند؟

۴) آیا رابطه‌ی زیر درست است؟

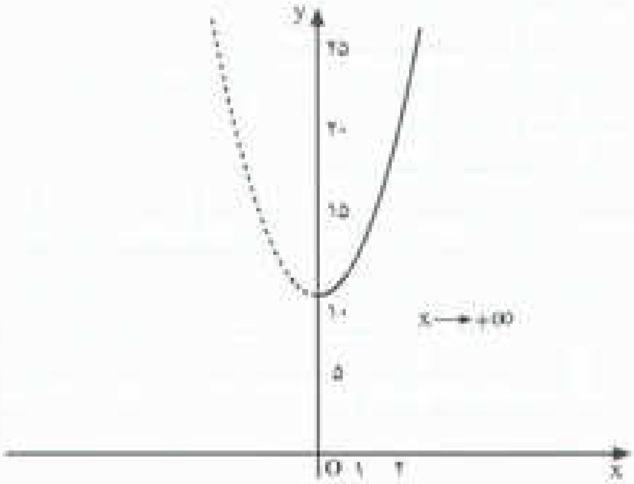
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (2x^2 + 10) = +\infty$$

۵) جدول ۲۵ـ۲ را کامل کنید.

جدول ۲۵ـ۲

x	...	-۱۰	۰	۱۰	۱۰۰	۱۰۰۰	...
$f(x)=2x^2+10$	...				۲۰۰۱۰		...

۶) وقتی $x \to +\infty$ مقدارهای $f(x)$ چگونه تغییر می‌کنند؟



شکل ۵۸ـ۲

۷) آیا رابطه‌ی زیر درست است؟

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (2x^2 + 10) = +\infty$$

۸) آیا درست است که بنویسیم؟

$$\lim_{x \to \pm\infty} (2x^2 + 10) = +\infty$$

(منظور از $x \to \pm\infty$ آن است که x به $+\infty$ یا $-\infty$ میل می‌کند.)

با توجه به فعالیت‌های ۹ـ۲، ۱۰ـ۲ و ۱۱ـ۲ می‌توان نشان داد که اگر m یک عدد صحیح مثبت و a عددی حقیقی و غیرصفر باشند آن‌گاه:

$$\lim_{x\to+\infty} ax^m=\begin{cases}+\infty\ , & a>0\\ -\infty\ , & a<0\end{cases}$$

و همچنین

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a}{x^m}=0$$

ضمناً، اگر m عدد مثبت زوج باشد داریم:

$$\lim_{x\to-\infty} ax^m=\begin{cases}+\infty\ , & a>0\\ -\infty\ , & a<0\end{cases}$$

ولی اگر m عدد مثبت فرد باشد داریم:

$$\lim_{x\to-\infty} ax^m=\begin{cases}-\infty\ , & a>0\\ +\infty\ , & a<0\end{cases}$$

از مطالب بالا برای تعیین حد عبارت‌های کسری که صورت و مخرج آن‌ها چندجمله‌ای هستند استفاده می‌شود.

در زیر، مثال‌هایی در این مورد ملاحظه می‌کنید.

مثال‌های حل شده

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^5-x+7}{x^3-2x^2+3x}=?$

حل: در صورت و مخرج کسر از جمله‌ی با بزرگ‌ترین درجه فاکتور می‌گیریم:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^5-x+7}{x^3-2x^2+3x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^5(1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^4}+\frac{7}{2}\cdot\frac{1}{x^5})}{x^3(1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2})}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}(2x^2)=+\infty$$

ب) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^4-7x^2+1}{x-3x^2}=?$

حل:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^4-7x^2+1}{x-3x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^4(1-\frac{7}{x^2}+\frac{1}{x^4})}{-3x^2(-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x}+1)}$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}-\frac{1}{3}x^2=-\infty$$

ج) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-x^5+x}{1+x^7-x^3}=?$

حل: مانند دو مثال قبل عمل می‌کنیم:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x^5+x}{1+x^7-x^3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^5(-\frac{1}{x^3}+1-\frac{1}{x^4})}{x^7(\frac{1}{x^7}+1-\frac{1}{x^4})}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{x^2}=-\infty$$

د) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^5-x^4+x^2+3}{2-2x^5+x^4-x^2}=?$

حل:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^5-x^4+x^2+3}{2-2x^5+x^4-x^2}=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^5(1-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^5})}{-2x^5(-\frac{1}{x^5}+1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^3})}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}(-\frac{3}{2})=-\frac{3}{2}=-1/5$$

تمرین ۴ـ۲

۱) حدهای زیر را تعیین کنید.

الف) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{۲x^{۲} + ۵x + ۱}{x + ۲}$

ب) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-۳x - ۲}{۵x^{۲} + ۲}$

پ) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{۲x^{۲} + x - ۳}{۳x^{۲} + ۷x - ۱}$

ت) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{۲x + ۵}{-\frac{۱}{۲}x + ۶}$

ث) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^{۳} + ۱}{x - ۲x^{۳}}$

۲) تابع $f:R \to R$ با ضابطه‌ی $f(x) = \dfrac{x^{m} + x^{۲} + ۱}{x^{۲} + ۳x - ۱}$
داده شده است. عدد m را چنان بیابید که :

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = ۲$$

(راهنمایی: عبارت‌های صورت و مخرج کسر مساوی
f(x) را بر $x^{۲}$ تقسیم کنید.)

۳) تابع f با ضابطه‌ی زیر داده شده است.

$f(x) = \dfrac{ax^{۳} + ۳x^{۲} - ۱}{x^{۳} - ۲x + ۴}$ مقدار a را طوری تعیین کنید که
داشته باشیم :

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = -۴$$

۴) تابع f با ضابطه‌ی زیر داده شده است :

$f(x) = \dfrac{x^{۲} - ۳x + ۷}{x^{m} + x^{۲} - ۳}$ حدود m را طوری تعیین کنید
که داشته باشیم :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = ۰$$

۵) تابع f با ضابطه‌ی زیر داده شده است :

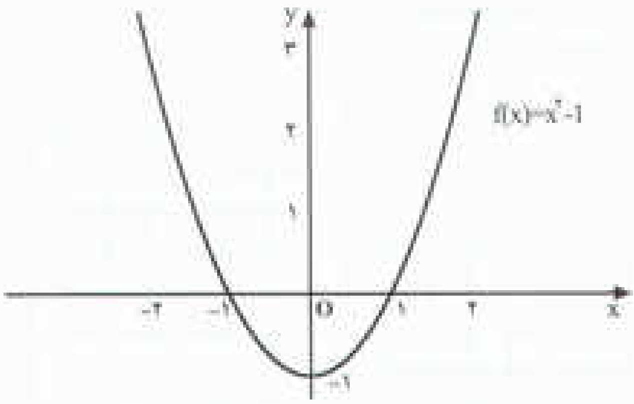
$f(x) = \dfrac{x^{n} - ۲x^{n-۱} + ۵}{x^{۳} - ۲x^{۲} + ۷x + ۱}$ حدود n را طوری تعیین
کنید که داشته باشیم :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

فعالیت ۱۲ـ۲

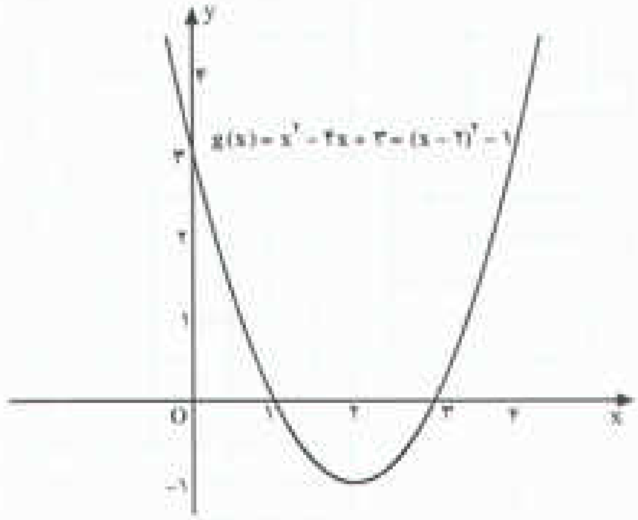
تابع $q(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x^2-1}{x^2-4x+3}$ را درنظر بگیرید.

۱) حد تابع $f(x)=x^2-1$ را، وقتی $x\to 1$، تعیین کنید (شکل ۵۹ـ۲).



شکل ۵۹ـ۲

۲) حد تابع $g(x)=x^2-4x+3$ را، وقتی $x\to 1$، به‌دست آورید (شکل ۶۰ـ۲).



شکل ۶۰ـ۲

۳) حد تابع $q(x)=\frac{x^2-1}{x^2-4x+3}$، وقتی $x\to 1$، به چه صورتی درمی‌آید؟

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2-4x+3}=\cdots$$

۴) آیا می‌توان این حد را با استفاده از مطالبی که تاکنون گفته شده است حساب کرد؟

۵) صورت و مخرج تابع کسری $\frac{x^2-1}{x^2-4x+3}$، یعنی $f(x)=x^2-1$ و $g(x)=x^2-4x+3$، را به حاصل‌ضرب عامل‌های اول تجزیه کنید.

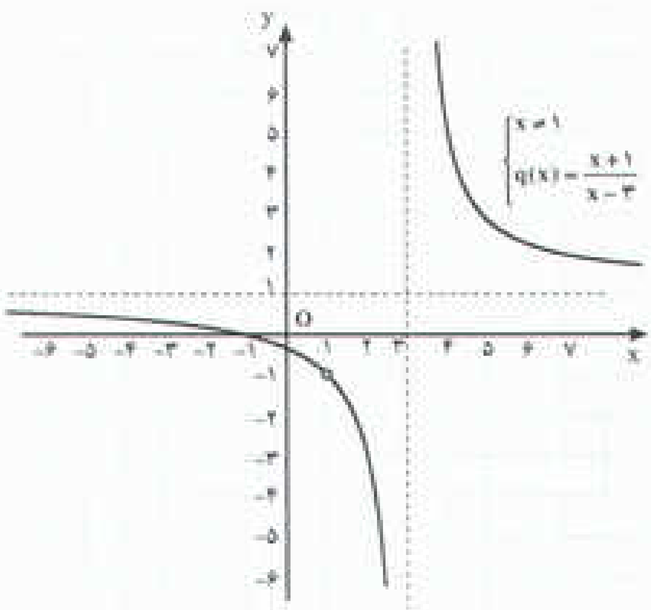
$$x^2-1=(x-1)(\quad)$$
$$x^2-4x+3=(x-1)(\quad)$$

۶) با توجه به این که وقتی $x\to 1$ همواره $x\neq 1$، یعنی $x-1\neq 0$، تابع $q(x)$ را ساده کنید.

$$q(x)=\frac{x^2-1}{x^2-4x+3}=\frac{(x-1)(\quad)}{(x-1)(\quad)}$$
$$=\text{- - - - - - - - - - -}$$

۷) آیا $q(x)=\frac{x+1}{x-3}$؟

۸) حد تابع $q(x)=\frac{x+1}{x-3}$ را، وقتی $x\to 1$، حساب کنید (شکل ۶۱ـ۲).



شکل ۶۱ـ۲

۹) آیا تساوی $\lim_{x\to 1}q(x)=-1$ درست است؟

به‌طورکلی اگر $\lim_{x\to a}f(x)=0$ و $\lim_{x\to a}g(x)=0$ آنگاه حد $q(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$، وقتی $x\to a$، به‌صورت $\frac{0}{0}$ درمی‌آید و نمی‌توان

مقدار آن را به کمک مطالبی که تاکنون گفته شده است محاسبه کرد. برای محاسبه‌ی مقدار این حد، با توجه به نوع تابع‌های $f(x)$ و $g(x)$ باید روش مناسبی اختیار کرد.

مطالب ذیل، وقتی که $f(x)$ و $g(x)$ چند جمله‌ای باشند، مفید است.

۴ـ۳ـ۲ـ بخش‌پذیری چندجمله‌ای‌ها بر $x-a$: اگر $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$ و به ازای $x=a$ داشته باشیم $f(a)=0$ آنگاه $f(x)$ بر $(x-a)$ بخش‌پذیر است. از این ویژگی می‌توان برای تجزیه‌ی چندجمله‌ای‌ها استفاده کرد.

فعالیت ۱۳ـ۲

چندجمله‌ای $f(x)=2x^2-5x+2$ را درنظر می‌گیریم.

$$\begin{array}{r|l} 2x^2-5x+2 & x-2 \\ \hline & \end{array}$$

۱) مقدار $f(2)$ را حساب کنید.

۲) آیا $f(x)$ بر $(x-2)$ بخش‌پذیر است؟ چرا؟

۳) خارج قسمت تقسیم $f(x)$ بر $(x-2)$ را به‌دست آورید.

۴) به کمک تقسیم بالا، چندجمله‌ای $f(x)$ را به حاصل‌ضرب عوامل تجزیه کنید.

$$2x^2-5x+2=(x-2)(\quad)$$

تمرین ۵ـ۲

۱) تقسیم‌های روبه‌رو را انجام دهید.

الف) $\begin{array}{r|l} -2x^3+5x^2+8x-20 & x+2 \\ \hline & \end{array}$

ب) $\begin{array}{r|l} 3x^3+2x^2-5 & x-1 \\ \hline & \end{array}$

پ) $\begin{array}{r|l} 3x^2+5x+\frac{7}{4} & x+\frac{1}{2} \\ \hline & \end{array}$

۲) مقدار a را چنان تعیین کنید که چندجمله‌ای $p(x)=ax^3+(a+1)x^2-18$ بر $(x-3)$ بخش‌پذیر باشد.

روش هورنر

برای به‌دست آوردن خارج‌قسمت و باقی‌مانده‌ی تقسیم یک چندجمله‌ای بر $(x-a)$ روشی ساده وجود دارد که به **روش هورنر** مشهور است. با ذکر دو مثال این روش را توضیح می‌دهیم:

مثال ۱: برای انجام تقسیم

$$۲x^۳ - ۳x^۲ + ۵x + ۱۰ \div (x+۱)$$

به صورت زیر عمل می‌کنیم.

۱) چندجمله‌ای را به‌صورت استاندارد می‌نویسیم.

۲) ضریب‌های چندجمله‌ای را به ترتیب از چپ به راست می‌نویسیم.

(اگر توانی از x نباشد ضریب آن را صفر منظور می‌کنیم.)

۳) ریشه‌ی عبارت $(x+۱)$، یعنی مقسوم‌علیه را به‌دست می‌آوریم.

$$x+۱=۰ \Rightarrow x=-۱$$

۴) مقدار ریشه را در جدولی به‌صورت جدول ۲۶ـ۲ می‌نویسیم.

جدول ۲۶ـ۲

	۲	-۳	۵	۱۰
-۱	+۰			
	۲			

۵) عدد صفر را زیر ضریب بزرگ‌ترین درجه می‌نویسیم و با آن جمع می‌کنیم.

۶) بقیه‌ی عملیات را مطابق جدول ۲۷ـ۲ انجام می‌دهیم.

۷) از اعداد جدول ۲۷ـ۲ خارج قسمت تقسیم را می‌نویسیم.

$$۲x^۳ - ۳x^۲ + ۵x + ۱۰ = (x+۱)(۲x^۲ - ۵x + ۱۰)$$

جدول ۲۷ـ۲

	۲	-۳	۵	۱۰
-۱	+۰	$(-۱)\times ۲$	$(-۱)\times(-۵)$	$(-۱)\times ۱۰$
	۲	-۵	۱۰	۰

مثال ۲: تقسیم $x^۴ - ۴x^۲ + ۲x - ۴$ بر $(x-۲)$ را به روش هورنر انجام دهید. سپس خارج قسمت تقسیم را بنویسید.

جدول ۲۸ـ۲

	۱	۰	-۴	۲	-۴
۲	+۰	۲	۴	۰	۴
	۱	۲	۰	۲	۰

حل۲

$$\text{خارج قسمت} = x^۳ + ۲x^۲ + ۲$$

اکنون، به کمک مطالب بالا، چند نمونه حد را، که با استفاده از بخش‌پذیری چندجمله‌ای‌ها بر $x-a$ محاسبه می‌شوند، ارائه می‌کنیم.

مثال ۳: حد تابع $q(x)=\dfrac{۳x^۲+x-۴}{x^۲+x-۲}$ را، وقتی $x \to ۱$، تعیین کنید.

حل۳: چون صورت و مخرج کسر مساوی $q(x)$، به ازای $x=۱$ صفر می‌شوند، پس چندجمله‌ای‌های صورت و مخرج بر $(x-۱)$ بخش‌پذیرند. با استفاده از بخش‌پذیری داریم:

$$۳x^۲+x-۴=(x-۱)(۳x+۴)$$

$$x^۲+x-۲=(x-۱)(x+۲)$$

بنابراین، با توجه به این‌که $x \neq ۱$،

$$q(x)=\frac{۳x^۲+x-۴}{x^۲+x-۲}=\frac{(x-۱)(۳x+۴)}{(x-۱)(x+۲)}=\frac{۳x+۴}{x+۲}$$

لذا،

$$\lim_{x\to ۱} q(x)=\lim_{x\to ۱}\frac{۳x+۴}{x+۲}=\frac{\lim_{x\to ۱}(۳x+۴)}{\lim_{x\to ۱}(x+۲)}=\frac{۳+۴}{۱+۲}=\frac{۷}{۳}.$$

فعالیت ۱۴ـ۲

تابع $q(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{3x^3+4x^2-5x-2}{x^4+4x^3+13x+2}$ را درنظر می‌گیریم.

۱) مقدارهای $f(-2)$ و $g(-2)$ را به‌دست آورید.

۲) حد $q(x)$، وقتی $x \to -2$، به چه صورت درمی‌آید؟

۳) به کمک بخش‌پذیری صورت و مخرج کسر مساوی $q(x)$ را تجزیه و بعد ساده کنید.

۴) آیا $q(x)=\dfrac{3x^2-2x-1}{x^3+2x^2+6x+1}$؟

۵) اینک حد $q(x)$ را، وقتی $x \to -2$، حساب کنید.

۵ـ۳ـ۲ـ قضیه‌ی فشردگی: اگر به ازای هر x از بازه‌ی I، که شامل عدد a است، مگر احتمالاً در a، داشته باشیم :

$$g(x) \le f(x) \le h(x)$$

و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\lim\limits_{x\to a} h(x)=l$ آنگاه $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$

مثال ۱: ثابت کنید $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$

حل: می‌دانیم که همواره $-1 \le \sin x \le 1$ پس، اگر x عددی مثبت باشد داریم :

$$-\frac{1}{x} \le \frac{\sin x}{x} \le \frac{1}{x}$$

امّا، $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(-\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{x}=0$. بنابراین، طبق نامساوی‌های بالا و قضیه‌ی فشردگی

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\sin x}{x}=0$$

مثال ۲: تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ ، $(x \ne 0)$ را در نظر بگیرید. جدول ۲۹ـ۲ تغییرات این تابع را وقتی $x \to 0$ نشان می‌دهد.

تمرین ۶ـ۲

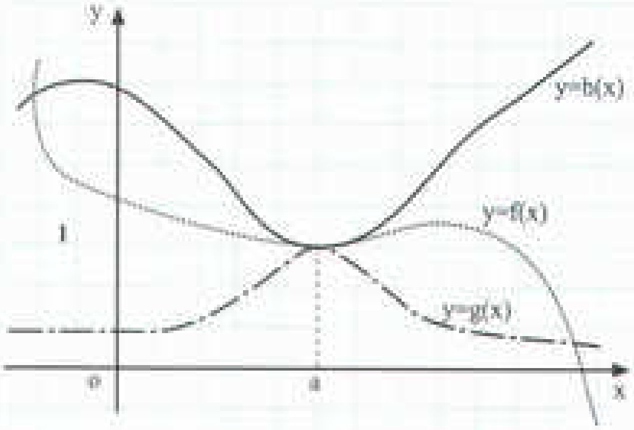
هریک از حدهای زیر را با استفاده از بخش‌پذیری حساب کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+x-2}$

ب) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3+x}{x^2+2x}$

پ) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{(x+2)^2}$

ت) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x-10}{3x^2-5x-2}$



شکل۶۲ـ۲

جدول ۲۹ـ۲

x	...	$-\frac{\pi}{30}$	$-\frac{\pi}{180}$	$-\frac{\pi}{9000}$	... ...	$\frac{\pi}{9000}$	$\frac{\pi}{180}$	$\frac{\pi}{30}$	...
$f(x)=\frac{\sin x}{x}$	...	۰/۹۹۸۱۷۳	۰/۹۹۹۹۴۹	۰/۹۹۹۹۹۹۹۸	تعریف‌نشده	۰/۹۹۹۹۹۹۹۸	۰/۹۹۹۹۴۹	۰/۹۹۸۱۷۳	...

به طوری که ملاحظه می‌شود، وقتی $x \to 0$، $\frac{\sin x}{x}$ به عدد یک میل می‌کند. یعنی، جدول ۲۹ـ۲ نشان می‌دهد که

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}$$

نتیجه‌ی ۱: $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$

زیرا، با توجه به این که $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$، داریم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\times\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}$$

$$=1\times\frac{1}{\cos 0}=1\times\frac{1}{1}=1$$

نتیجه‌ی ۲: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin mx}{x}=m$ و $\lim_{x\to 0}\frac{\tan mx}{x}=m$،

که در آن‌ها m عددی حقیقی و مخالف صفر است.

زیرا، می‌توان نوشت:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin mx}{x}=\lim_{x\to 0}m.\frac{\sin mx}{mx}$$

با فرض $mx=y$، واضح است که وقتی $x\to 0$، $y=mx\to 0$، بنابراین:

$$\lim_{x\to 0}m\frac{\sin mx}{mx}=\lim_{y\to 0}m.\frac{\sin y}{y}=m.1=m$$

به همین ترتیب،

$$\lim_{x\to 0}m\frac{\tan mx}{mx}=\lim_{y\to 0}m.\frac{\tan y}{y}=m.1=m$$

مثال‌ها (در رابطه با نتیجه‌ی ۲)

الف) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}$ را تعیین کنید.

حل: می‌توان نوشت:

$$\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}=\frac{1}{2}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}=\frac{1}{2}$$

ب) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 5x}{x}$ را حساب کنید.

حل: داریم:

$$\frac{\tan 5x}{x}=5\frac{\tan 5x}{5x}\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{\tan 5x}{x}=5$$

ب) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan\frac{3x}{2}}{x}$ را حساب کنید.

حل: داریم:

$$\frac{\tan\frac{3}{2}x}{x}=\frac{3}{2}\frac{\tan\frac{3}{2}x}{\frac{3}{2}x}$$

بنابراین، با فرض $\frac{3}{2}x=t$ داریم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan\frac{3}{2}x}{x}=\frac{3}{2}\lim_{t\to 0}\frac{\tan t}{t}=\frac{3}{2}.$$

تمرین ۷ــ۲

حدهای زیر را حساب کنید.

الف) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 5x}{x}$

ب) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x}{2x}$

پ) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin^2 x}{x^2}$

ت) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan \pi x}{x}$

ث) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan \sqrt{2}x}{3x}$

ج) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x \sin x}{x^2}$

آزمون پایانی (۳)

محل پاسخ به سؤالات آزمون پایانی

۱ـ اگر $f(x)=\frac{x^2-2x-3}{x^2-9}$ در $x=3$ پیوسته باشد، مقدار $f(3)$ را به‌دست آورید.

۲ـ اگر m عددی طبیعی باشد و $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^m+x+1}{x^2+2}=+\infty$، کمترین مقدار m چیست؟

۳ـ اگر n عددی طبیعی باشد و $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^n-3x+14}{x^4+6}=0$، بیشترین مقدار n چیست؟

۴ـ اگر $\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^n+2x^2+1}{ax^3+2}=2$، مقدار n و a را به‌دست آورید.

۵ـ اگر به ازای مقدارهای بزرگ x، $\frac{4x^2+3x+1}{8x^2+1}\le f(x)\le\frac{x+2}{2x-1}$، مقدار $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ را به‌دست آورید.

۶ـ اگر $f(x)=2ax^3+x-a+20$ بر $(x+2)$ بخش‌پذیر باشد، مقدار $f(0)$ برابر چیست؟

۷ـ اگر $f(x)=\frac{x}{x+1}$ مقدار $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(f(x))}{2x+1}$ را به‌دست آورید.

تمرین‌های تکمیلی بخش دوم

۱) تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}3+2x, & x\geq 1\\ x+4, & x<1\end{cases}$ داده شده است.

الف) با توجه به ضابطه‌ی f جدول زیر را کامل کنید.

x	۰/۸	۰/۹	۰/۹۹	...	۱	...	۱/۰۰۱	۱/۰۱	۱/۱
f(x)									

ب) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ را با استفاده از جدول به دست آورید و درستی آن را بررسی کنید.

۲) حد راست و حد چپ تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\dfrac{4x^2-9}{2x-3}, & x\neq \dfrac{3}{2}\\ 2x+4, & x=\dfrac{3}{2}\end{cases}$ را وقتی $x\to\dfrac{3}{2}$ به دست آورید.

آیا $\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}} f(x)$ وجود دارد؟

۳) تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی

$f(x)=\begin{cases}x^2+\dfrac{1}{x}, & x\geq\dfrac{1}{2}\\ 2-x-x^2, & x<\dfrac{1}{2}\end{cases}$ داده شده است.

پیوستگی این تابع در نقطه‌ی $x=\dfrac{1}{2}$ را بررسی کنید.

۴) ضریب‌های a و b را چنان بیابید که تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}ax+2, & x<-2\\ \dfrac{2}{x}+b, & x>-2\\ 6, & x=-2\end{cases}$ در نقطه‌ی $x=-2$ پیوسته باشد.

۵) حدهای زیر را حساب کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{-1}{(x+2)^2}$

ب) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3x+2}{1-2x}$

پ) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+2x+1}{x^3+4x^2+5x+2}$

ت) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{2x-1}}{2-\sqrt{x-1}}$

ث) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x+\sin 2x+\sin 3x)$

ج) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x\sin x}{2x^2}$

بخش سوم

مشتق و کاربردهای آن

هدف کلی بخش

تعیین رفتار تابع‌ها و رسم دقیق نمودار آن‌ها و به‌کارگیری مشتق در تقریب و بهینه‌سازی.

جدول عناوین فصل‌ها

شماره‌ی فصل	عنوان فصل	زمان
اول	مشتق	۸ ساعت
دوم	کاربرد مشتق (۱)	۱۰ ساعت
سوم	کاربرد مشتق (۲)	۸ ساعت
چهارم	کاربرد مشتق (۳)	۱۰ ساعت

بخش سوم

فصل اول

مشتق

هدف کلی

درک مفهوم مشتق و به‌دست آوردن مشتق تابع‌های متداول

هدف‌های رفتاری: انتظار می‌رود فراگیر پس از پایان این فصل بتواند :

۱ــ مشتق یک تابع را در یک نقطه تعریف کند.

۲ــ به کمک تعریف حد، مشتق تابع‌های ساده را حساب کند.

۳ــ قضیه‌های مشتق و فرمول‌های آن را برای تعیین مشتق تابع‌های دیگر به کار برد.

پیش آزمون (۱)

۱ــ فرض کنید تابع با ضابطه $f(x) = 2x + 3$ در R تعریف شده باشد.

الف) $f(x + \Delta x)$ را حساب کنید.

ب) $f(x + \Delta x) - f(x)$ را به‌دست آورید.

پ) عبارت $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ را تعیین کنید.

ت) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ را حساب کنید.

۲ــ تابع f با ضابطه‌ی $y = f(x) = x^3$ در R تعریف شده است.

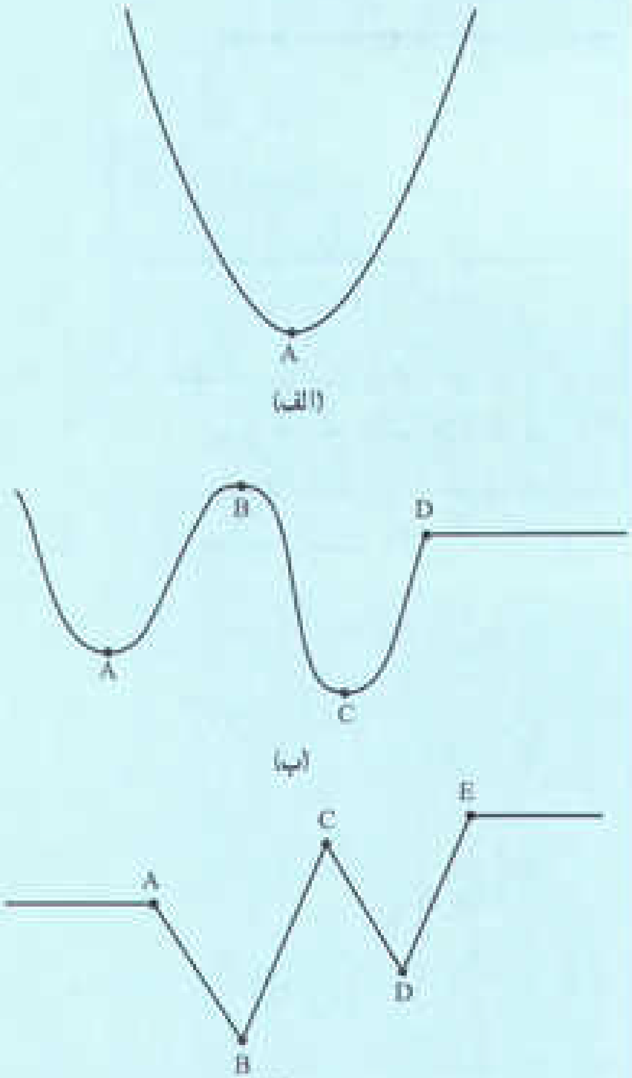
الف) اگر نمو x برابر Δx باشد نمو y را حساب کنید.

ب) $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ را تعیین کنید.

پ) مقدار $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ را به‌دست آورید.

۳ــ در هر یک از منحنی‌های شکل ۱ــ۳ نقاطی از منحنی را که در آن‌ها مماس بر منحنی وجود ندارد مشخص کنید.

محل پاسخ به سؤالات پیش‌آزمون



شکل ۱ــ۳

۱ـ۳ـ مشتق

جهت پرداختن به مطالب این فصل، نمونه‌ای از مسائل را که توسط مشتق حل می‌شوند بررسی می‌کنیم.

فعالیت ۱ـ۳

شکل ۲ـ۳ یک ورق فلزی ربع دایره به شعاع ۶ سانتی‌متر را نشان می‌دهد. می‌خواهیم نقطه‌ای به فاصله‌ی x از O انتخاب کنیم به طوری که مساحت مستطیل حاصل، یعنی S(x)، بیشترین مقدار را داشته باشد.

کارهای زیر را انجام دهید شاید به نتیجه برسید!

۱ـ دو نقطه با xهای ۲ و ۳ روی پاره‌خط OA انتخاب شده است. مساحت مستطیل‌های ایجاد شده را حساب کنید و در جدول ۱ـ۳ بنویسید.

۲ـ شما نیز حداقل سه نقطه‌ی دیگر روی پاره‌خط OA انتخاب کنید و مساحت مستطیل‌های به‌دست آمده را در جدول ۱ـ۳ بنویسید. (می‌توانید از ماشین حساب نیز کمک بگیرید.)

۳ـ با استفاده از جدول ۱ـ۳ درباره‌ی تغییرات تابع S(x) چه می‌توان گفت؟ آیا به این ترتیب به جواب می‌رسید؟

جدول ۱ـ۳

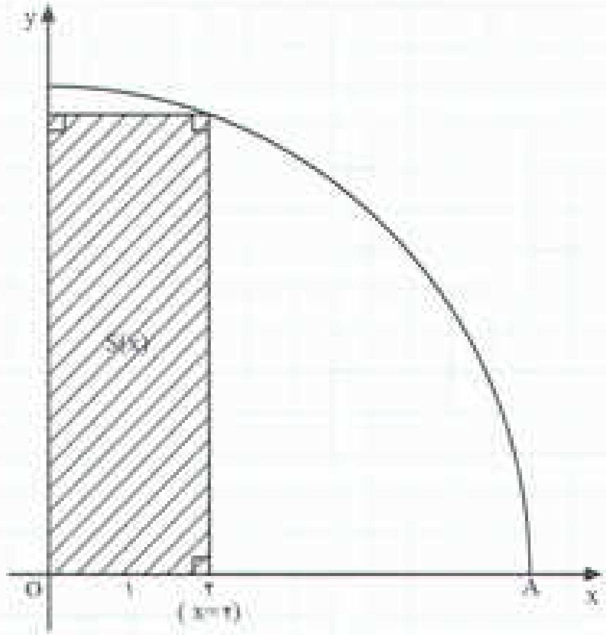
x	S(x)
۲	
۳	

بیشترین مقدار (ماکسیمم) S(x) چقدر است؟ و به ازای چه مقداری از x حاصل می‌شود؟

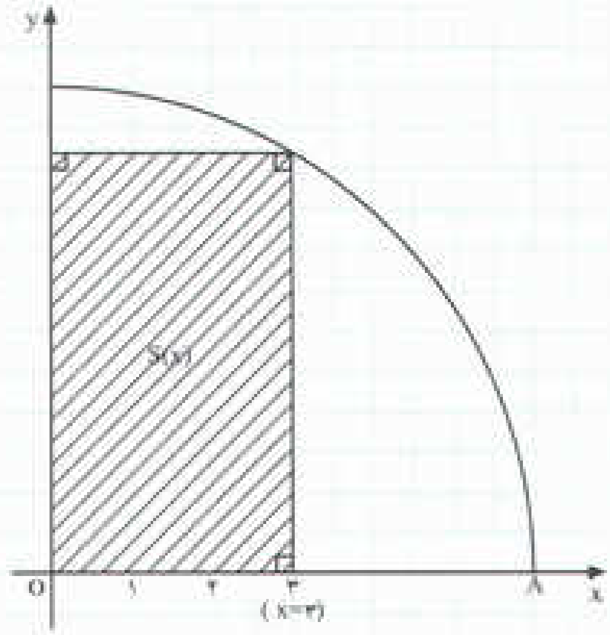
آیا مقدار S(x) با افزایش x، افزایش می‌یابد؟ (S(x) صعودی است؟)

در چه بازه‌ای S(x) با افزایش x، کاهش می‌یابد؟ (S(x) نزولی است.)

در این فصل به کمک مشتق به این سؤال‌ها پاسخ خواهیم داد.



شکل ۲ـ۳



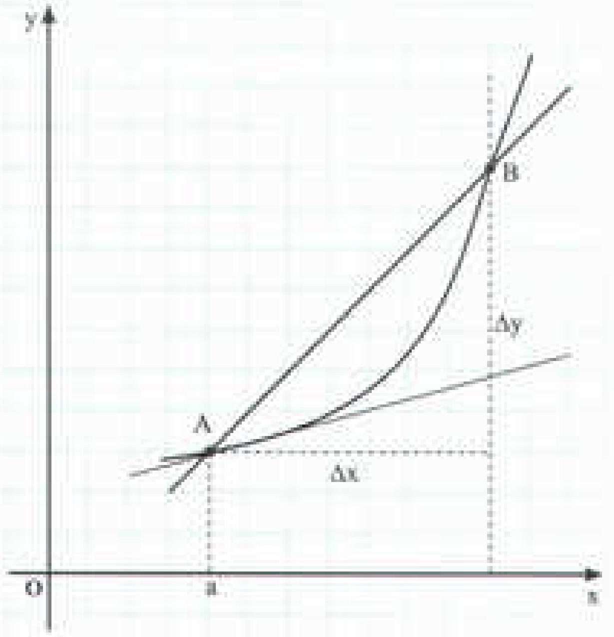
شکل ۳ـ۳

در ابتدای فصل دوم ملاحظه گردید که شیب خط مماس بر منحنی $y=f(x)$ در نقطه‌ی $A\left|\begin{matrix}a\\f(a)\end{matrix}\right.$ برابر است با

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

در واقع، اگر این حد وجود داشته باشد همان مشتق تابع f در $x=a$ است (شکل ۴ــ۳).

در حالت کلی تعریف زیر را داریم.



شکل ۴ــ۳

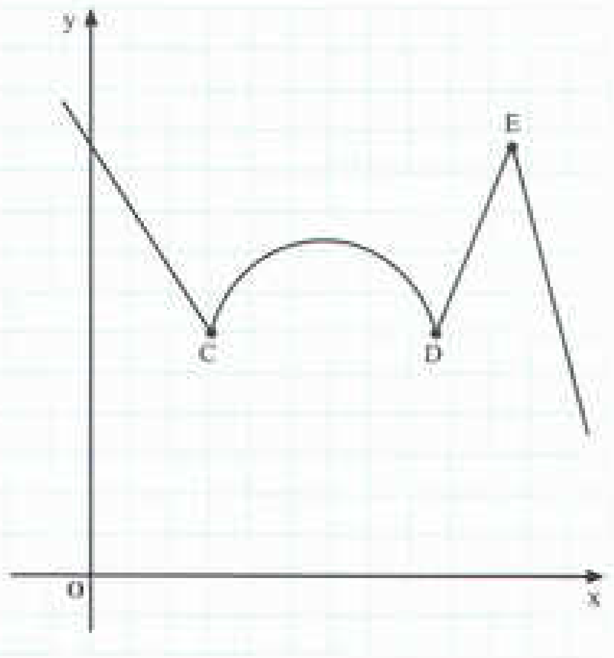
تعریف: مشتق تابع f در $x=a$ برابر است با

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=f'(a)$$

به شرط آن که این حد وجود داشته باشد. مقدار مشتق در a را با $y'(a)$ نیز نشان می‌دهند.

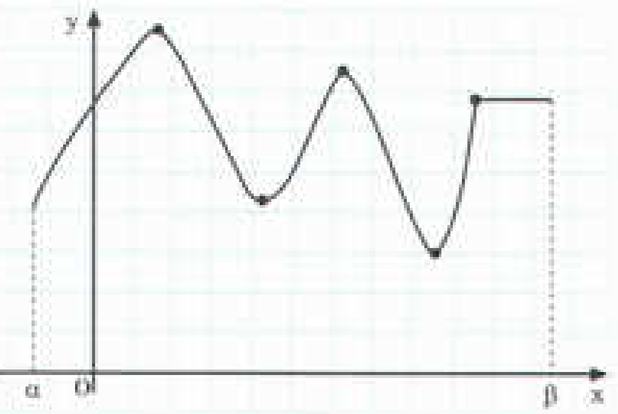
نکته: شکل ۵ــ۳ نشان می‌دهد که ممکن است مشتق در برخی از نقاط یک منحنی وجود نداشته باشد، این مطلب از عدم وجود خط مماس در این نقاط نتیجه می‌شود.

با استفاده از مفهوم مشتق می‌توان نتیجه گرفت که برای شکل ۵ــ۳ مشتق در نقاط C، D و E وجود ندارد. چرا؟



شکل ۵ــ۳

به کمک ویژگی‌های مشتق یک تابع می‌توان نمودار آن تابع را با دقت بیشتری رسم کرد. به عبارت دیگر، می‌توان دقیقاً مشخص کرد که نمودار در چه ناحیه‌هایی صعودی، نزولی یا ثابت است و تحدّب (کوژی) و تقعّر (کاوی) آن به چه سمتی است و در چه نقاطی ماکسیمم یا مینیمم می‌شود (شکل ۶ــ۳).



شکل ۶ــ۳

۱ــ۱ــ۳ــ محاسبه‌ی مشتق به کمک تعریف: برای محاسبه‌ی مشتق یک تابع می‌توان از تعریف مشتق به صورت‌های مختلف استفاده کرد. در زیر به سه صورت این کار انجام شده است.

$$(۱)\quad f'(a)=\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

در فرمول (۱) اگر قرار دهیم $\Delta x=h$، به دست می‌آوریم :

$$(۲)\quad f'(a)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

اگر قرار دهیم $\Delta x=x-a$ در این صورت، $\Delta x\to ۰$ معادل $x\to a$ است و $a+\Delta x=x$. بنابراین، (۱) به صورت زیر درمی‌آید :

$$(۳)\quad f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

برای محاسبه‌ی مشتق، با استفاده از تعریف، از یکی از فرمول‌های بالا استفاده کنید. این فرمول‌ها مشتق در a را نشان می‌دهند.

مثال نمونه

$y=f(x)=x^۲+۱\ ,\ a=۱$

$f(a)=f(۱)=۲\ ,\ f(۱+\Delta x)=(۱+\Delta x)^۲+۱$

$=۲+۲\Delta x+(\Delta x)^۲$

$f(۱+\Delta x)-f(۱)=۲\Delta x+(\Delta x)^۲$

$f'(۱)=\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{f(۱+\Delta x)-f(۱)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to ۰}(۲+\Delta x)=۲$

$f'(۱)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(۱+h)-f(۱)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{[(۱+h)^۲+۱]-۲}{h}$

$\lim_{h\to ۰}\frac{۲+۲h+h^۲-۱}{h}=\lim_{h\to ۰}(۲+h)=۲$

$f'(۱)=\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}$

$=\lim_{x\to ۱}\frac{(x^۲+۱)-۲}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{x^۲-۱}{x-۱}$

$=\lim_{x\to ۱}(x+۱)=۲$

تعریف: اگر $f'(a)$ وجود داشته باشد گوییم f در a مشتق دارد. اگر برای هر x از دامنه‌ی f، $f'(x)$ وجود داشته باشد گوییم f در دامنه‌اش **مشتق‌پذیر** است.

$$\boxed{\begin{array}{l} f'(x)=\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\\ f'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\ f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\end{array}}$$

۲ــ۱ــ۳ــ برخی فرمول‌های مشتق: هدف اصلی این فصل استفاده از مشتق برای حل مسائل مربوط به مشتق است (به برخی از این مسائل در ابتدای فصل اشاره شد). لذا، اثبات فرمول‌های مشتق موردنظر نیست. معهذا، برای آن که تعریف مشتق به کار گرفته شود و فرمول آن، برای مواقع لازم، مورد استفاده قرار گیرد، مشتق چند تابع ساده، به کمک تعریف، در مقابل به دست آمده است.

الف) $f(x)=c$ مقدار ثابت

$f'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{c-c}{h}=۰$

$\boxed{\text{مشتق تابع ثابت در هر نقطه صفر است.}}$

ب) $f(x)=Ax+B$

$f'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$f'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{[A(x+h)+B]-(Ax+B)}{h}$

$=A$

کار در کلاس ۱ـ۳

مشتق تابع‌های زیر را با استفاده از تعریف مشتق به دست آورید.

۱) $f(x) = x^2$

۲) $f(x) = x^3$

مثلاً، اگر $f(x) = 3x + 4$ آنگاه $f'(x) = 3$

با توجه به نتایج به‌دست آمده می‌توان برای هر عدد طبیعی n نوشت :

$$\boxed{\text{اگر } f(x) = x^n \text{ آنگاه } f'(x) = nx^{n-1}}$$

در روبه‌رو مثال‌هایی از این فرمول را ملاحظه می‌کنید.

۳ـ۱ـ۳ـ تعبیر هندسی مشتق: همان‌طور که قبلاً گفته شد، در صورتی که $f'(a)$ وجود داشته باشد ضریب زاویه‌ی خط مماس در نقطه‌ی $A\left|\begin{matrix} a \\ f(a) \end{matrix}\right.$ برابر $f'(a)$ است.

بنابراین، مماس برنمودار $y = \alpha x + \beta$ در هر نقطه از این خط همین خط است! چرا؟ (شکل ۷ـ۳).

زیرا، $y' = \alpha$ و معادله‌ی خطی که از $A\left|\begin{matrix} a \\ y(a) \end{matrix}\right.$ با ضریب زاویه‌ی α می‌گذرد عبارت است از :

$$y - (\alpha a + \beta) = \alpha(x - a)$$

که پس از ساده‌کردن به معادله‌ی زیر می‌رسیم :

$$y = \alpha x + \beta$$

با توجه به مطلب بالا، در نمودار شکل ۸ـ۳ مماس بر نمودار در کدام نقاط وجود ندارد؟ چرا؟

نقاطی را که در آن‌ها مماس برنمودار وجود ندارد مشخص کنید.

تابع $y = |x|$ در چه نقطه‌ای مشتق ندارد؟ (شکل ۹ـ۳).

قضیه: اگر تابع f در نقطه‌ی $x = a$ مشتق داشته باشد در این نقطه پیوسته است.

آیا این قضیه نیازی به اثبات دارد؟ توضیح دهید.

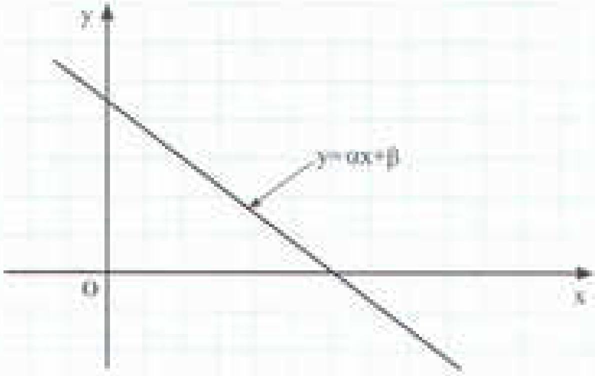
آیا می‌توانید تصوری از یک تابع پیوسته داشته باشید که در هیچ نقطه‌ای از دامنه‌اش مشتق نداشته باشد؟

مثال‌های نمونه

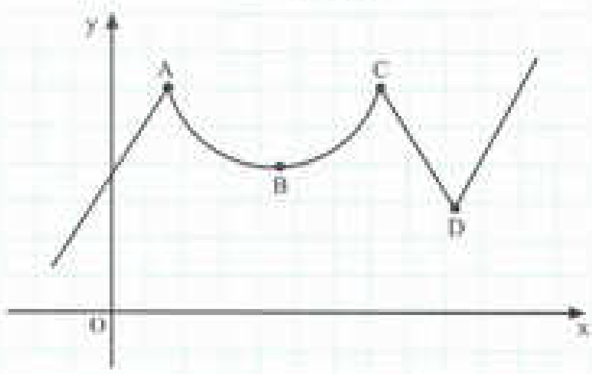
$y = x^3 \Rightarrow y' = 3x^2$

$y = x^7 \Rightarrow y' = 7x^6$

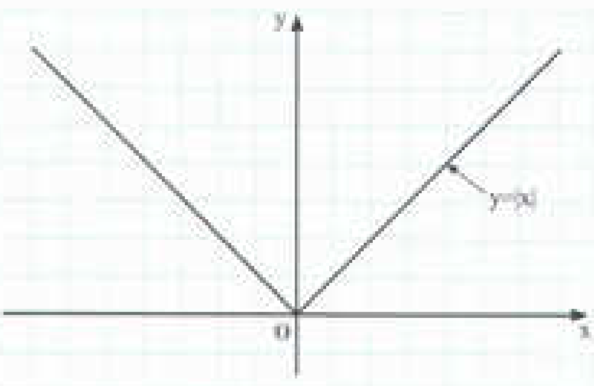
$y = x^{100} \Rightarrow y' = 100x^{99}$



شکل ۷ـ۳



شکل ۸ـ۳



شکل ۹ـ۳

بازی با مشتق

منحنی کُخ: در شکل ۱۰ـ۳ پاره خطی به طول ۶ سانتی‌متر رسم شده است. این پاره‌خط به سه قسمت متساوی تقسیم شده و مطابق شکل ۱۱ـ۳، $\frac{1}{3}$ وسط آن برداشته شده و به جای آن دو پاره‌خط هم اندازه با آن، مطابق شکل ۱۱ـ۳ قرار داده شده است. این کار با چهار پاره‌خط شکل ۱۱ـ۳ تکرار شده است (شکل ۱۲ـ۳).

شکل ۱۲ـ۳ از چند پاره‌خط تشکیل شده است؟

محیط شکل ۱۱ـ۳ چند سانتی‌متر است؟

شکل ۱۱ـ۳ در چند نقطه‌ی داخلی مشتق ندارد؟

محیط شکل ۱۲ ـ۳ چند سانتی‌متر است؟

شکل ۱۲ـ۳ در چند نقطه‌ی داخلی مشتق ندارد؟

روی شکل ۱۲ـ۳ عملی را که روی شکل‌های ۱۰ـ۳ و ۱۱ـ۳ انجام شده، انجام دهید.

شکل حاصل از چند پاره‌خط تشکیل می‌شود؟ محیط آن چند سانتی‌متر است؟

شکلی که به دست آورده‌اید در چند نقطه‌ی داخلی مشتق ندارد؟

اگر این عمل را مرتباً روی شکل‌های به‌دست آمده انجام دهید، **در نهایت به منحنی کخ** می‌رسید که نوعی **فراکتال** است. **یعنی هر جزء آن مشابه کل آن است!**

آیا منحنی کخ پیوسته است؟

آیا منحنی کخ در نقطه‌ای دارای مشتق است؟

آیا منحنی کخ در سطحی محدود قرار دارد؟

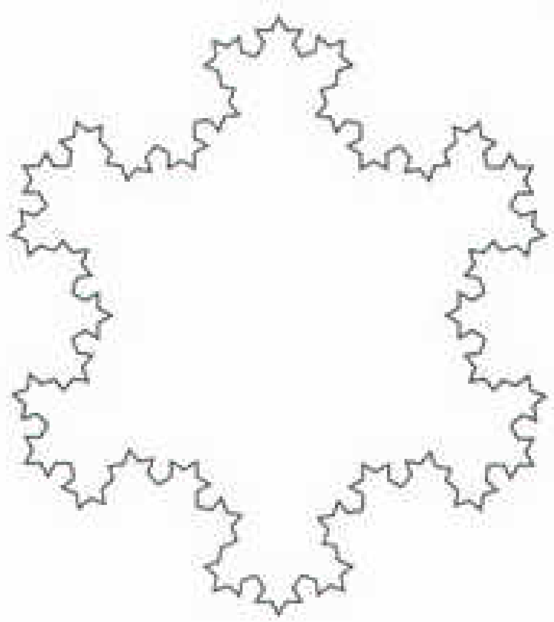
آیا محیط منحنی کخ متناهی است؟

اگر کارهای بالا را روی مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۶ سانتی‌متر انجام دهید در مرحله‌ی سوم به شکل ۱۳ـ۳ می‌رسید. این شکل در حد، **برفدانه‌ی کخ** نامیده می‌شود. [۱۰]

شکل ۱۰ـ۳

شکل ۱۱ـ۳

شکل ۱۲ـ۳



شکل ۱۳ـ۳

۴ـ۱ـ۳ـ قضیه‌های مشتق: اثبات قضیه‌های زیر به کمک تعریف مشتق ساده است ولی هدف، استفاده از این قضیه‌ها در حل مسائل است.

در مقابل، با استفاده از قضیه‌های زیر، مثال‌های نمونه‌ای حل شده است.

مثال‌های نمونه

قضیه‌ی ۱ (مشتق حاصل‌جمع دو تابع): اگر $f'(x)$ و $g'(x)$ وجود داشته باشند آنگاه:

$$(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x)$$

این قضیه برای تعداد با پایان تابع مشتق‌پذیر نیز برقرار است.

$$y=x^۲+x^۳ \Rightarrow y'=۲x+۳x^۲$$

$$y=x^۳-x^۲+x+۴ \Rightarrow y'=۳x^۲-۲x+۱$$

قضیه‌ی ۲ (مشتق حاصل‌ضرب دو تابع): اگر $f'(x)$ و $g'(x)$ وجود داشته باشند آنگاه:

$$(f(x)\times g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

نتیجه: اگر k عددی ثابت باشد آنگاه:

$$(kf(x))'=kf'(x)$$

$$y=(x^۲+۱)(x^۳-x+۴)$$

$$y'=۲x(x^۳-x+۴)+(x^۲+۱)(۳x^۲-۱)$$

$$y=۸x^۲ \Rightarrow y'=۸\times ۲x=۱۶x$$

قضیه ۳ (مشتق تقسیم دو تابع): اگر $f'(x)$ و $g'(x)$ وجود داشته باشند و $g(x)\neq ۰$ آنگاه:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^۲}$$

$$y=\frac{۲x-۵}{x+۱}$$

$$y'=\frac{۲(x+۱)-۱(۲x-۵)}{(x+۱)^۲}=\frac{۷}{(x+۱)^۲}$$

قضیه‌ی ۴ (مشتق تابع‌های مثلثاتی):

الف) اگر $y=\cos x$ آنگاه $y'=-\sin x$

ب) اگر $y=\sin x$ آنگاه $y'=\cos x$

پ) اگر $y=\tan x$ آنگاه $y'=۱+\tan^۲ x$

ت) اگر $y=\cot x$ آنگاه $y'=-(۱+\cot^۲ x)$

$$y=\sin x+\cos x, y'=\cos x-\sin x$$

$$y=۲\cos x-۳\sin x,\quad y'=-۲\sin x-۳\cos x$$

$$y=x^۲\sin x,\quad y'=۲x\sin x+x^۲\cos x$$

$$y=\tan x+x\cos x-\cot x,$$

$$y'=۱+\tan^۲ x+\cos x-x\sin x+۱+\cot^۲ x$$

قضیه‌ی ۵: فرض کنید u تابعی از x و f تابعی از u باشد و $u'(x)$ و $f'(u)$ وجود داشته باشند. اگر $y=f(u)$ آنگاه:

$$y'=u'(x)f'(u)$$

۱) $y=f(u)=u^۳\ ,\quad u=(x^۲+x-۱)$

$$y'(x)=u'(x)\times f'(u)=(۲x+۱)\times ۳u^۲$$

$$=(۲x+۱)\times ۳\times (x^۲+x-۱)^۲$$

$$۲)\ y=\sqrt{x}=x^{\frac{۱}{۲}} \Rightarrow y'=\frac{۱}{۲}x^{\frac{۱}{۲}-۱}$$

$$=\frac{۱}{۲}x^{-\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}$$

$$۳)\ y=\sqrt[۳]{(۲x+۱)^۲} \Rightarrow y'=\frac{۲}{۳}\times ۲\times(۲x+۱)^{\frac{۲}{۳}-۱}$$

$$=\frac{۴}{۳\sqrt[۳]{۲x+۱}}$$

$$۴)\ y=\sqrt{۲x^۲+x-۲}$$

$$y'=\frac{۴x+۱}{۲\sqrt{۲x^۲+x-۲}}$$

$$۵)\ y=\sqrt[۵]{x^۳+۷x-۲}$$

$$y'=\frac{۳x^۲+۷}{۵\sqrt[۵]{(x^۳+۷x-۲)^۴}}$$

$$۶)\ y=\sqrt{۲+\sin x}$$

$$y'=\frac{\cos x}{۲\sqrt{۲+\sin x}}$$

$$۷)\ y=\sin^۷ x$$

$$y'=۷\cos x\sin^۶ x$$

نتیجه‌ی ۱: اگر $y=u^n$ آنگاه $y'=nu'u^{n-1}$.

نتیجه‌ی ۲: اگر $y=\sqrt{u}$ آنگاه $y'=\frac{u'}{۲\sqrt{u}}$.

نتیجه‌ی ۳: اگر $y=\sqrt[m]{u^n}$ آنگاه $y=u^{\frac{n}{m}}$ و

$$y'=\frac{n}{m}u'u^{\frac{n}{m}-1}$$

$$=\frac{nu'}{m\sqrt[m]{u^{m-n}}}$$

کار در کلاس ۲ـــ۳

با استفاده از فرمول‌های مشتق که در صفحه‌ی بعد ملاحظه می‌کنید، مشتق تابع‌های زیر را، در سمت چپ، بنویسید.

الف) $y=۳x^۲-\sqrt{۲}x+\frac{۲}{۷}$

ب) $y=(۳x-۱)(x+۲)$

پ) $y=x\sqrt{x}$

ت) $y=\cos x+x\sin x$

ث) $y=\sqrt[۵]{(۲x-۱)^۲}$

ج) $y=\cos(x+\frac{\pi}{۴})$

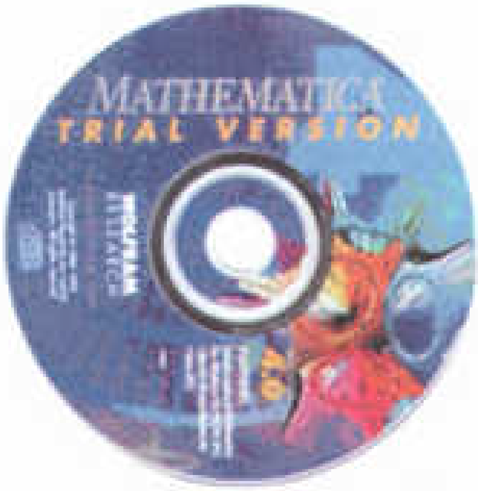
چ) $y=\sin(\frac{\pi}{۴}-۲x)$

ح) $y=\sin(۲x+۱)-\cos ۳x$

خ) $y=\frac{x+\cos x}{۲+\sin x}$

د) $y=\cot ۳x$

ذ) $y=\sqrt{\frac{۱}{۲+\cos x}}$



۵ـ۱ـ۳ـ جدول فرمول‌های مشتق: در زیر، جدول مربوط به فرمول‌های مشتق تابع‌هایی که بیشتر مورد استفاده قرار می‌گیرند، آمده است. انتظار می‌رود با حل تمرین‌های متعدد این فرمول‌ها را به خاطر بسپارید. معهذا، چون هدف اصلی کاربرد این فرمول‌ها در حل مسائل است، به دبیران محترم توصیه می‌شود که در آزمون‌های مربوط به این فصل جدول را در اختیار دانش‌آموزان قرار دهند.

تابع	مشتق تابع	مثال
$y=c$	$y'=۰$	$y=۴\Rightarrow y'=۰,\ y=۳\sqrt{۲}\Rightarrow y'=۰$
$y=ax+b$	$y'=a$	$y=-۶x+۷\Rightarrow y'=-۶,\ y=\frac{۱}{۲}x\Rightarrow y'=\frac{۱}{۲}$
$y=x^n, n\in R$	$y'=nx^{n-1}$	$y=x^۳\Rightarrow y'=۳x^۲,\ y=x^۷\Rightarrow y'=۷x^۶$
$y=kf(x)$ و k ثابت	$y'=kf'(x)$	$y=۶x^۲\Rightarrow y'=۶\times۲x=۱۲x$
$y=u\pm v$	$y'=u'\pm v'$	$y=x^۳+۲x^۲\Rightarrow y'=۳x^۲+۴x$
$y=u.v$	$y'=u'v+uv'$	$y=(x^۲+۱)(۲x^۳-x^۲+۱)$ $y'=۲x(۲x^۳-x^۲+۱)+(x^۲+۱)(۶x^۲-۲x)$
$y=\frac{u}{v}$	$y'=\frac{u'v-uv'}{v^۲}$	$y=\frac{۲x-۵}{x^۲+۱}\Rightarrow y'=\frac{۲(x^۲+۱)-۲x(۲x-۵)}{(x^۲+۱)^۲}=\frac{-۲x^۲+۱۰x+۲}{(x^۲+۱)^۲}$
$y=\sqrt{u}$	$y'=\frac{u'}{۲\sqrt{u}}$	$y=\sqrt{۵x}\Rightarrow y'=\frac{۵}{۲\sqrt{۵x}}$
$y=u^n$	$y'=nu'u^{n-1}$	$y=(۳x^۲-۵)^۳\Rightarrow y'=۳(۶x)(۳x^۲-۵)^۲=۱۸x(۳x^۲-۵)^۲$
$y=\sqrt[m]{u^n}$	$y'=\frac{nu'}{m\sqrt[m]{u^{m-n}}}$	$y=\sqrt[۶]{(x^۲+x+۱)^۵}\Rightarrow y'=\frac{۵(۲x+۱)}{۶\sqrt[۶]{x^۲+x+۱}}$
$y=\sin u$	$y'=u'\cos u$	$y=\sin ۳x\Rightarrow y'=۳\cos ۳x$
$y=\cos u$	$y'=-u'\sin u$	$y=\cos\frac{۱}{۲}x\Rightarrow y'=-\frac{۱}{۲}\sin\frac{۱}{۲}x$
$y=\tan u$	$y'=u'(۱+\tan^۲ u)$	$y=\tan\frac{۱}{x}\Rightarrow y'=-\frac{۱}{x^۲}(۱+\tan^۲\frac{۱}{x})$
$y=\cot u$	$y'=-u'(۱+\cot^۲ u)$	$y=\cot(۱-۲x)\Rightarrow y'=۲(۱+\cot^۲(۱-۲x))$

تمرین ۱ــ۳

۱) مشتق تابع‌های زیر را با استفاده از جدول مشتق بنویسید.

الف) $y = 5x^3 - 3x^2 + 1$

ب) $y = x(3x^2 + x)$

پ) $y = 2\sin x \cos x$

ت) $y = \sqrt{3x - 1}$

ث) $y = \sqrt[5]{(x^2 + x)^3}$

ج) $y = \dfrac{2\cos x}{\sin x + 2}$

چ) $y = \tan 3x + \sin \sqrt{x}$

ح) $y = (x^3 - 2x + 1)^7$

۲) اگر $f(x) = \dfrac{x - 1}{x + 1}$ ، مقدار $f'(0)$ را به‌دست آورید.

۳) اگر $u = x^2 - 1$ و $y = 5u^3$ ، حاصل y'_x را بنویسید.

۴) اگـــر $y = 2u^3 + 5u - 1$ و $u = \sqrt{x^2 + 4}$ ، y'_x را به‌دست آورید.

۵) مشتق تابع‌های زیر را حساب کنید.

الف) $y = 3x + 5$

ب) $y = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} - x + \sqrt{2}$

پ) $y = 4(x^3 + 2x - 1)$

ت) $y = \dfrac{7x^2 + 6x - 4}{9}$

ث) $y = \dfrac{\sin x - \cos x}{2\cos x + 3}$

ج) $y = \sin^3 x + \cos^3 x$

چ) $y = \tan^5 \dfrac{x}{2}$

ح) $y = \sqrt{\dfrac{1}{x}}$

خ) $y = \sqrt[3]{1 + \cos^2 x}$

۶ـ۱ـ۳ـ مشتق دوم یک تابع: همان‌طور که مشتق یک تابع تعریف شد، می‌توان مشتقِ مشتق یک تابع را نیز تعریف کرد و آن را، در صورت وجود، حساب کرد. مشتق تابع f را با f' و مشتق تابع f' را با f'' نمایش می‌دهیم. در این صفحه، مشتق دوم (f'') برای چند تابع حساب شده است.

مشتق دوم یک تابع در رسم دقیق نمودار تابع‌ها کاربرد دارد (بخش جهت تقعّر منحنی را ببینید).

مثال‌ها:

الف) $f(x)=۴x^۳-x^۲+۲ \Rightarrow \begin{cases} f'(x)=۱۲x^۲-۲x \\ f''(x)=۲۴x-۲ \end{cases}$

ب) $f(x)=\sin x \Rightarrow \begin{cases} f'(x)=\cos x \\ f''(x)=-\sin x \end{cases}$

پ) $f(x)=\frac{۱}{x} \Rightarrow \begin{cases} f'(x)=-\frac{۱}{x^۲} \\ f''(x)=\frac{۲}{x^۳} \end{cases}$

ت) $f(x)=\cos x \Rightarrow \begin{cases} f'(x)=-\sin x \\ f''(x)=-\cos x \end{cases}$

ث) $f(x)=\tan x \Rightarrow \begin{cases} f'(x)=۱+\tan^۲ x \\ f''(x)=۲\tan x(۱+\tan^۲ x) \end{cases}$

ج) $f(x)=\frac{۲}{x-۱} \Rightarrow \begin{cases} f'(x)=\frac{-۲}{(x-۱)^۲} \\ f''(x)=\frac{۴}{(x-۱)^۳} \end{cases}$

تمرین ۲ـ۳

مشتق دوم هریک از تابع‌های زیر را به‌دست آورید:

الف) $y=۲x^۲+۷x-۵$

ب) $y=-\frac{۱}{۴}x^۲+۶x-۴$

پ) $y=x^۳+۲x^۲-۵x+۲$

ت) $y=(x-۲)^۳$

ث) $y=\sin ۲x$

ج) $y=\cos x+\sin x$

ج) $y=\frac{x-۱}{x+۲}$

آزمون پایانی (۱)

محل پاسخ به سؤالات آزمون پایانی

۱ــ تابع $f(x)=x^2-1$ در $\mathbb{R}$ تعریف شده است. مشتق این تابع را در $x=1$ حساب کنید.

۲ــ مشتق تابع $y=2x+3$ را در $x=1$، به کمک تعریف مشتق، حساب کنید.

۳ــ تابع $y=|x+2|$ در چه نقطه‌ای از نمودارش دارای خط مماس نیست؟

۴ــ فرض کنید $f(x)=|x|$ حساب کنید:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(-h)}{2h}$$

۵ــ مشتق تابع‌های زیر را حساب کنید.

الف) $y=\cos x+\sin x$

ب) $y=x\sqrt{x}$

پ) $y=\sqrt{\frac{1}{2+\cos x}}$

ت) $y=\sqrt[5]{(x^2+1)^3}$

ث) $y=\sin^2 x+\cos^2 x$

۶ــ با توجه به ضابطه‌ی y مقدار y'' را حساب کنید.

الف) $y=\sqrt{x}$

ب) $y=\sin x$

پ) $y=\sqrt[3]{x^2}$

بخش سوم

فصل دوم

کاربردهای مشتق (۱)

هدف کلی

به‌کاربردن مشتق تابع برای رسم خط مماس و قائم در یک نقطه از نمودار یک تابع، تعیین صعودی یا نزولی بودن یک تابع و به‌دست‌آورن نقطه‌های اکسترمم یک تابع

هدف‌های رفتاری: انتظار می‌رود فراگیر پس از پایان این فصل بتواند :

۱ـ معادله‌ی خط مماس را در یک نقطه از نمودار یک تابع بنویسد.

۲ـ معادله‌ی خط قائم بر یک منحنی را در نقطه‌ای واقع بر آن بنویسد.

۳ـ به کمک مشتق، صعودی یا نزولی‌بودن یک تابع را مشخص کند.

۴ـ رفتار یک تابع را در بازه‌های مختلف تعیین کند.

۵ـ نقطه‌های اکسترمم یک تابع را تعیین کند.

پیش‌آزمون (۲)

محل پاسخ به سؤالات پیش‌آزمون

۱ــ فرض کنید نقطه‌ی A روی نمودار تابع زیر باشد :

$y = f(x) = x^2 - x + 1$

الف) اگر $x_A = 1$ مقدار y_A را حساب کنید.

ب) مقدار $f'(1)$ را به‌دست آورید.

پ) معادله‌ی خط (D) را بنویسید که از نقطه‌ی A بگذرد و شیب آن $f'(1)$ باشد.

ت) نمودار $y = f(x)$ و خط (D) را رسم کنید.

ث) آیا خط (D) بر نمودار $y = f(x)$ مماس است؟

۲ــ فرض کنید $y = x^3$ در $\mathbb{R}$ تعریف شده باشد.

الف) نمودار y را رسم کنید (از طریق نقطه‌یابی).

ب) دو نقطه‌ی A و B را روی نمودار این تابع چنان انتخاب کنید که $x_B > x_A$ و ثابت کنید $y_A < y_B$.

ت) رفتار این تابع چگونه است؟ نام این تابع چیست؟

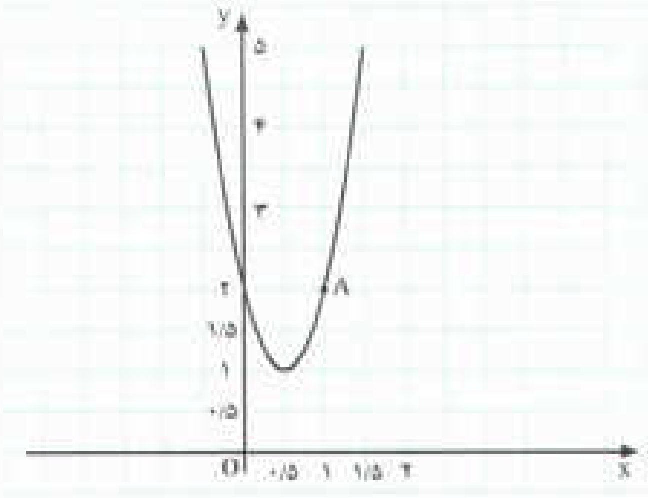
۳ــ فرض کنید $f(x) = x^3 - x$ ، علامت $f'(x)$ را در $\mathbb{R}$ تعیین کنید.

۴ــ اگر $f(x) = x^2 - 2x + 3$ مینیمم مقدار $f(x)$ را به‌دست آورید.

۲ـ۳ـ کاربردهای مشتق (۱)

۱ـ۲ـ۳ـ تعیین معادله‌ی خط مماس و خط قائم:

یکی از کاربردهای مشتق، تعیین معادله‌ی خط مماس و معادله‌ی خط قائم در یک نقطه‌ی دلخواه از نمودار یک تابع است.



شکل ۱۴ـ۳

فعالیت ۲ـ۳

تابع $y = f(x) = 4x^2 - 4x + 2$ و نمودار آن، (شکل ۱۴ـ۳)، داده شده است. برای نوشتن معادله‌ی خط مماس و معادله‌ی خط قائم بر نمودار این تابع در نقطه‌ی $A\left|\begin{matrix}1\\ f(1)\end{matrix}\right.$ ، کارهای زیر را انجام دهید.

۱ـ مقدار $f(1)$ را حساب کنید.

۲ـ مشتق y را به‌دست آورید.

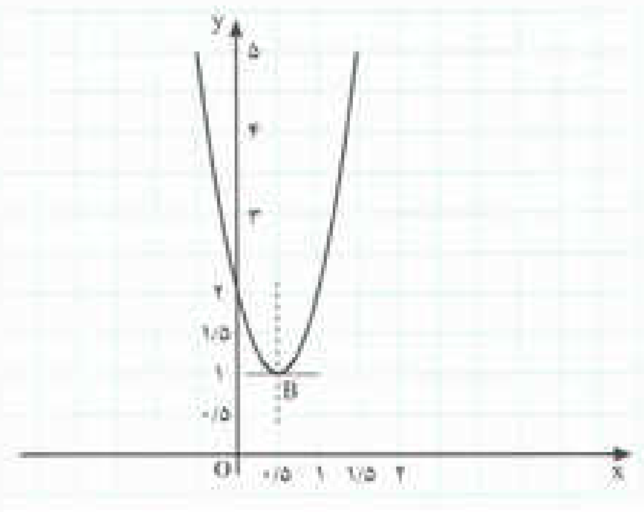
۳ـ مقدار $f'(1)$ را حساب کنید.

۴ـ معادله‌ی خطی که از نقطه‌ی A می‌گذرد و شیب آن $f'(1)$ است، بنویسید.

۵ـ آیا $y = 4x - 2$ معادله‌ی خط مماس در نقطه‌ی A است؟

۶ـ با توجه به این که خط قائم بر منحنی در هر نقطه عمود بر خط مماس بر منحنی در آن نقطه است، ابتدا شیب خط قائم و بعد معادله‌ی خط قائم بر نمودار فوق را در نقطه‌ی A بنویسید.

۷ـ خط مماس و خط قائم را در $x = 1$ رسم کنید.



شکل ۱۵ـ۳

کار در کلاس ۳ـ۳

با انتخاب $B\left|\begin{matrix}\frac{1}{2}\\ f(\frac{1}{2})\end{matrix}\right.$ مراحل ۱ تا ۷ را تکرار کنید (شکل ۱۵ـ۳).

مثال ۱: معادله‌ی خط مماس بر تابع $f(x) = -x^2 + 6x - 8$ در نقطه‌ی $x = -1$ واقع بر منحنی را بنویسید.

حل ۱: به‌ازای $x = -1$، داریم:

$$f(-1) = -(-1)^2 + 6(-1) - 8 = -15$$

بنابراین، $(-1, -15)$ نقطه‌ی تماس منحنی است.

از طرفی:

$$f'(x) = -2x + 6$$

پس، ضریب زاویه‌ی m به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$m = f'(-1) = -2(-1) + 6 = 8$$

معادله‌ی خط مماس چنین است:

$$y - (-15) = 8(x - (-1))$$

$$y = 8x - 7$$

مثال ۲: معادله‌ی خط قائم بر نمودار تابع $y = \cos^2 x - \sin^2 x$، در نقطه‌ی $x = \frac{\pi}{6}$، واقع بر این تابع را بنویسید.

حل ۲: اگر $x = \frac{\pi}{6}$،

$$y = (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 - (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2}$$

$$y' = -2\sin x \cos x - 2\sin x \cos x$$

$$= -4\cos x \sin x$$

شیب خط مماس $= -4(\frac{\sqrt{3}}{2})(\frac{1}{2}) = -\sqrt{3}$

شیب خط قائم $= -\frac{1}{-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

معادله‌ی خط قائم $\quad y - \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}(x - \frac{\pi}{6})$

تمرین ۳ــ۳

۱) معادله‌ی خط مماس و خط قائم بر نمودار تابع‌های زیر را، در نقطه‌هایی که x آن‌ها داده شده است، بنویسید.

الف) $y = 2x^2 - x + 1, \quad x = 2$

ب) $y = x^3 + 2x + 2, \quad x = -1$

پ) $y = \sin^2 x, \quad x = \pi$

ت) $y = \frac{x-1}{x+1}, \quad x = -2$

ث) $y = \tan x, \quad x = 0$

ج) $y = 2\sqrt{x}, \quad x = 1$

۲) نمودار تابع‌های زیر را در بازه‌ی داده‌شده رسم کنید و معادله‌ی مماس در نقطه‌های داده شده را بنویسید. خط قائم را نیز رسم کنید.

الف) $y = \sin x, \quad x = 0, -\pi \le x \le \pi$

ب) $y = \cos x, \quad x = 0, -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2}$

۲ــ۲ــ۳ــ رفتار تابع: مصرف آب یک مجتمع مسکونی، بین ساعت ۸ صبح تا ساعت ۲۰ از رابطه‌ی زیر تبعیت می کند (x برحسب ساعت و f(x) برحسب مترمکعب است) :

$$f(x) = 28x - x^2 - 155, \ x \in [8,20]$$

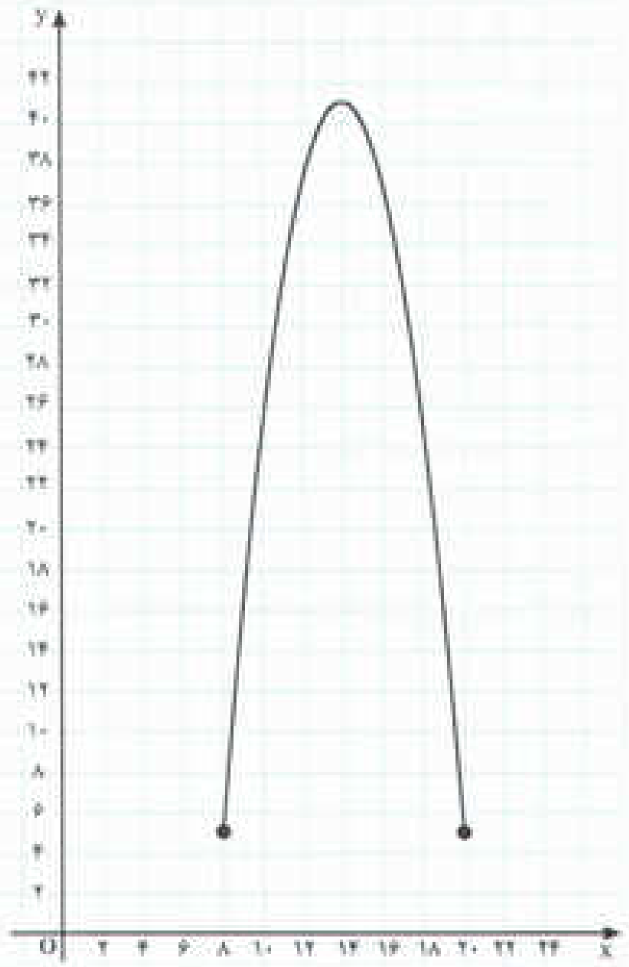
معین کنید در چه بازه‌ی زمانی مصرف آب در حال افزایش (صعود) و در چه بازه‌ی زمانی در حال کاهش (نزول) است؟

در چه زمانی مصرف آب حداکثر است؟ و این حداکثر چند مترمکعب است؟

حل: نمودار تابع $y = f(x)$ در شکل ۱۶ــ۳ رسم شده است، البته با استفاده از جدول ۲ــ۳ مقادیر زیر :

جدول ۲ــ۳

x	۸	۱۲	۱۶	۲۰
f(x)	۵	۳۷	۳۷	۵



شکل ۱۶ــ۳

با توجه به شکل ۱۶ــ۳ بگویید حداکثر مصرف آب در چه زمانی رخ می دهد؟

درست است، در ساعت ۱۴.

آیا بدون رسم شکل هم این عدد به‌دست می‌آید؟

$$f(14) = ?$$

عدد ۱۴ با اطلاعات قبلی چنین به‌دست می‌آید (امتحان کنید) :

$$f(x) = 28x - x^2 - 155 = 41 - (x-14)^2$$

واضح است که حداکثر f(x) مساوی ۴۱ و در $x = 14$ به‌دست می‌آید.

امّا، اگر قرار دهید $f'(x) = 0$ آنگاه :

$$f'(x) = 28 - 2x = 0 \Rightarrow x = 14$$

تابع f در بازه‌ی [۸,۱۴] صعودی و در بازه‌ی [۱۴,۲۰] نزولی است.

فعالیت ۳ــ۳

تابع $y=f(x)=\frac{1}{2}x^2$ و نمودار آن، در شکل ۱۷ــ۳، داده شده است. می‌خواهیم رفتار این تابع را در بازه‌های $(0,+\infty)$ و $(-\infty,0)$ بررسی کنیم.

۱ــ دو مقدار $x_1=1$ و $x_2=1/5$ متعلق به بازه‌ی $(0,+\infty)$ را در نظر بگیرید. آیا، $x_1<x_2$ می‌باشند؟

۲ــ مقدارهای $f(x_1)$ و $f(x_2)$ را به‌دست آورید.

آیا $f(x_1)<f(x_2)$ می‌باشند؟

۳ــ قرار دهید $x_1=2$ و $x_2=2/5$

آیا $f(x_1)<f(x_2)$ می‌باشند؟

۴ــ دو عدد دلخواه x_1 و x_2 را در بازه‌ی $(0,+\infty)$ در نظر بگیرید. با تشکیل عبارت $f(x_1)-f(x_2)=\frac{1}{2}x_1^2-\frac{1}{2}x_2^2$ نشان دهید که:

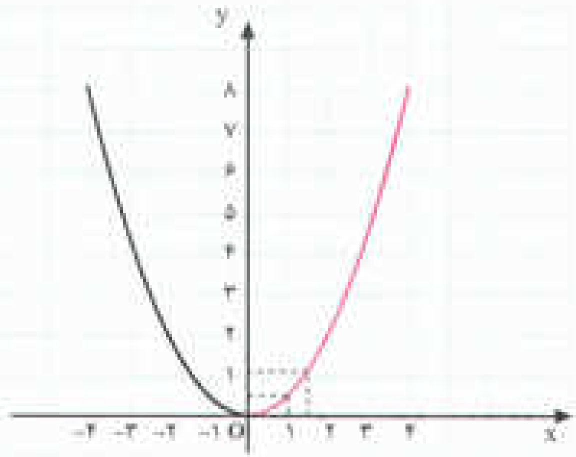
اگر $x_1<x_2$ آنگاه $f(x_1)<f(x_2)$ (*)

۵ــ با توجه به (*) اگر x_1 و x_2 دو عدد دلخواه متعلق به بازه‌ی $(0,+\infty)$ باشند علامت کسر زیر چیست؟

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

۶ــ با محاسبه‌ی y'، علامت y' را در $(0,+\infty)$ تعیین کنید.

با توجه به (*) تابع $y=\frac{1}{2}x^2$ را بر $(0,+\infty)$ **صعودی** گوییم.



شکل ۱۷ــ۳ــ نمودار $f(x)=\frac{1}{2}x^2$

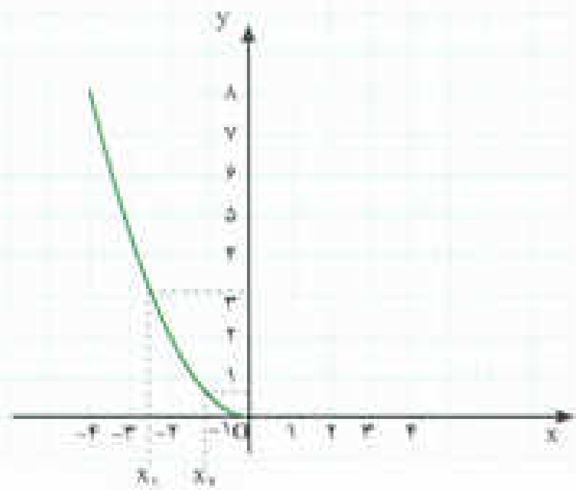
کار در کلاس ۴ــ۳

مشابه فعالیت ۳ــ۳ را در مورد تابع $y=\frac{1}{2}x^2$ بر بازه‌ی $(-\infty,0)$ انجام دهید (شکل ۱۸ــ۳).

۱ــ با تشکیل عبارت $f(x_1)-f(x_2)$ نشان دهید که، به‌ازای هر x_1 و x_2 از $(-\infty,0)$،

اگر $x_1<x_2$ آنگاه $f(x_1)>f(x_2)$ (†)

۲ــ آیا رابطه‌ی (†) از روی شکل ۱۸ــ۳ به‌وضوح دیده می‌شود؟



شکل ۱۸ــ۳ــ نمودار $y=\frac{1}{2}x^2$ برای $x<0$

۳ــ علامت عبارت زیر را در بازه‌ی $(-\infty,0)$ تعیین کنید.

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

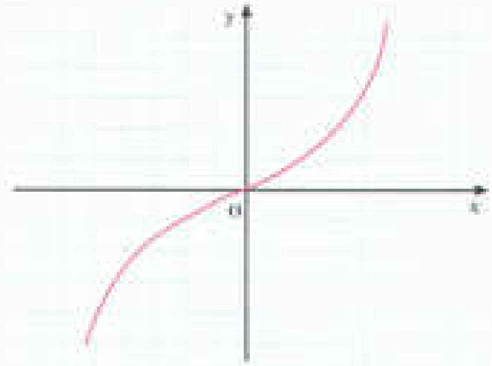
۴ــ با محاسبه‌ی y'، علامت y' را در $(-\infty,0)$ تعیین کنید.

با توجه به (۴) تابع $y=\frac{1}{2}x^2$ را بر $(-\infty,0)$ **نزولی** می‌نامیم.

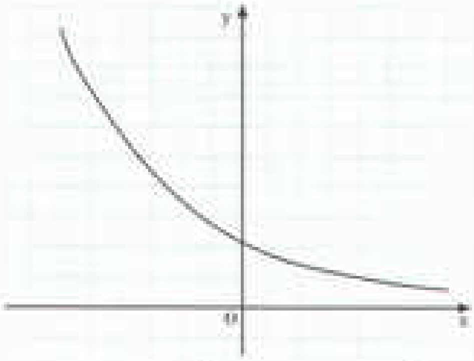
فرض کنید I یک بازه و $y=f(x)$ یک تابع باشند و $I \subset D_f$.

> تعریف ۱. تابع f را بر I صعودی نامیم درصورتی که برای هر x_1 و x_2 متعلق به I، اگر $x_1 < x_2$ آنگاه $f(x_1) \le f(x_2)$.

> تعریف ۲. تابع f را بر I نزولی نامیم درصورتی که برای هر x_1 و x_2 متعلق به I، اگر $x_1 < x_2$ آنگاه $f(x_1) \ge f(x_2)$.



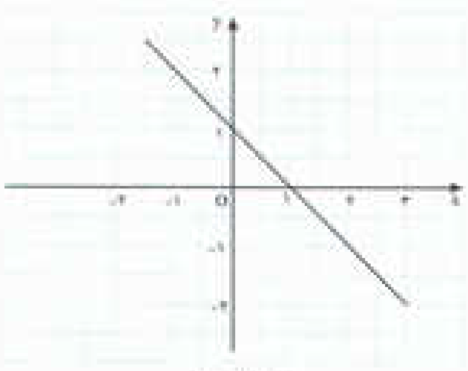
شکل ۱۹ــ۳ــ نمودار یک تابع صعودی



شکل ۲۰ــ۳ــ نمودار یک تابع نزولی

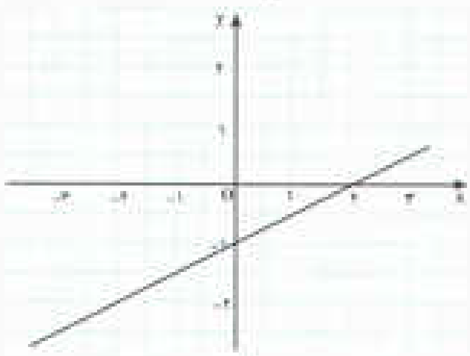
کار در کلاس ۵ــ۳

۱ــ با استفاده از تعریف صعودی یا نزولی بودن یک تابع معین کنید در شکل‌های ۲۱ــ۳ و ۲۲ــ۳ کدام تابع صعودی و کدام نزولی است؟



$y=1-x$

شکل ۲۱ــ۳



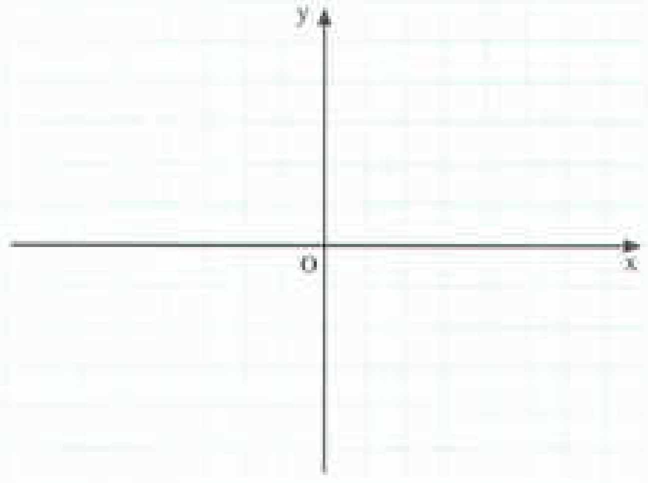
$y=\frac{1}{2}x-1$

شکل ۲۲ــ۳

آیا با استفاده از مشتق این تابع‌ها هم می‌توان در مورد صعودی یا نزولی‌بودن آن‌ها نظر داد؟

تمرین ۴ـ۳

۱ـ تابع $y = x^3$ داده شده است. در رفتار این تابع تحقیق کنید. (ابتدا نمودار این تابع را در شکل ۲۳ـ۳ رسم کنید.)

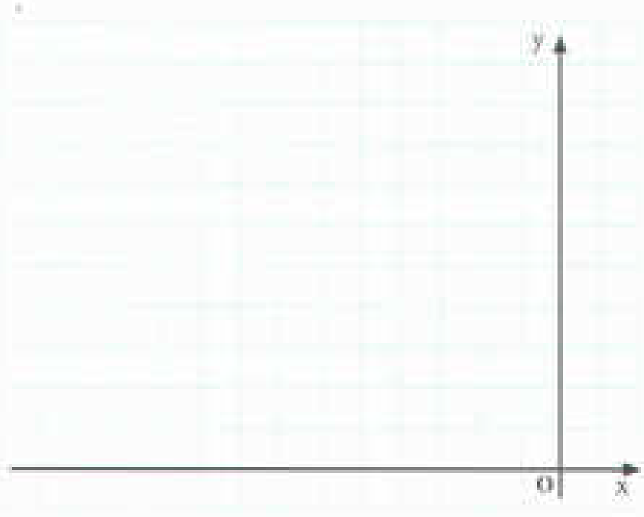


شکل ۲۳ـ۳

۲ـ تابع‌های زیر را در بازه‌ی $(-\infty, 0]$ و در شکل ۲۴ـ۳ رسم کنید و نشان دهید که این تابع‌ها نزولی هستند.

الف) $f(x) = x^2$

ب) $f(x) = x^4$

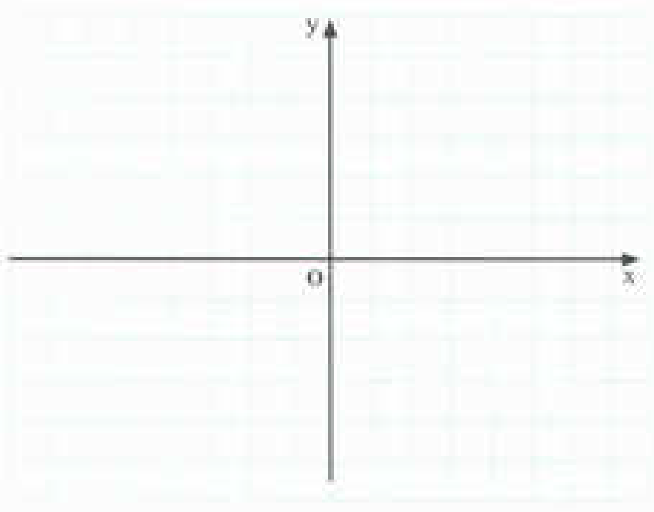


شکل ۲۴ـ۳

۳ـ نمودار تابع‌های زیر را در $\mathbb{R}$ در شکل ۲۵ـ۳، رسم کنید و نشان دهید که این تابع‌ها صعودی هستند.

الف) $f(x) = x$

ب) $f(x) = x^5$



شکل ۲۵ـ۳

۳ـ۲ـ۳ـ مشتق و رفتار تابع: با توجه به ویژگی یک تابع صعودی (یا نزولی)، درصورتی که این تابع در هر نقطه از دامنه‌اش مشتق داشته باشد، می‌توان با استفاده از علامت مشتق در مورد صعودی یا نزولی‌بودن آن، بدون رسم نمودارش، نظر داد.

فرض کنید تابع $y = f(x)$ بر بازه‌ی I صعودی باشد. در این صورت، اگر x_1 و x_2 متعلق به I باشند:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq 0$$

پس، با فرض $x_1 = x$ و $x_2 = x + h$، داریم:

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} \geq 0$$

لذا، اگر تابع f در هر نقطه‌ی داخلی از I مشتق داشته باشد، داریم:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = f'(x) \geq 0$$

به عکس، اگر برای هر نقطه‌ی داخلی x از بازه‌ی I داشته باشیم $f'(x) \geq 0$، آنگاه f بر I صعودی است.

لذا، قضیه‌ی زیر را داریم:

قضیه‌ی ۱: فرض کنید تابع f بر بازه‌ی باز I مشتق‌پذیر باشد و برای هر نقطه‌ی داخلی x متعلق به I داشته باشیم $f'(x) \geq 0$، در این صورت تابع f بر I صعودی است.

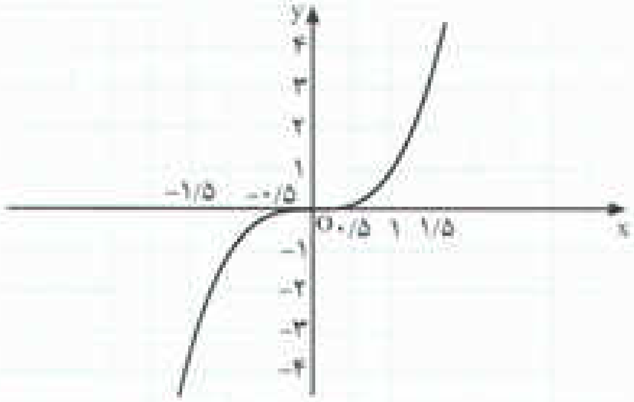
در روبه‌رو کاربرد این قضیه را، برای اثبات صعودی‌بودن چند تابع، ملاحظه می‌کنید.

مثال‌ها(در رابطه با قضیه‌ی ۱)

الف) $y = x^3,\ x \in R$

$y' = 3x^2 \geq 0,\ x \in R$

لذا، تابع $y = x^3$ بر R صعودی است.

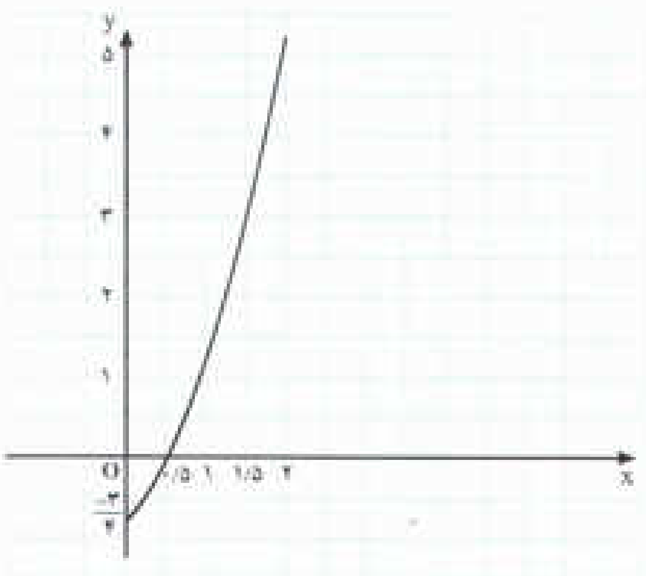


شکل ۲۶ـ۳ـ نمودار $y = x^3$

ب) $y = x^2 + x - \frac{3}{4},\ (x > 0)$

$y' = 2x + 1 > 0,\ (x > 0)$

لذا، تابع $y = x^2 + x - \frac{3}{4}$ بر $(0, +\infty)$ صعودی است (شکل ۲۷ـ۳).



شکل ۲۷ـ۳ـ نمودار $y = x^2 + x - \frac{3}{4}$

به طریق مشابه داریم:

قضیه‌ی ۲: اگر تابع f بر بازه‌ی I مشتق‌پذیر باشد و برای هر نقطه‌ی داخلی x متعلق به I داشته باشیم $f'(x) \leq 0$ آنگاه تابع f بر I نزولی است.

قضیه‌های ۱ و ۲ در تعیین رفتار یک تابع (یعنی نزولی یا صعودی بودن آن) بسیار مفیدند.

در مقابل، نزولی‌بودن چند تابع، با استفاده از مشتق آن‌ها، نشان داده شده است.

تعریف ۳. تابع f را بر بازه‌ی I **یکنوا** گوییم درصورتی که f بر I صعودی یا نزولی باشد.

کار در کلاس ۶ــ۳

با استفاده از قضیه‌های ۱ و ۲ رفتار تابع‌های زیر را در بازه‌های مشخص شده تعیین کنید.

۱) $y = 2x - 100, \quad x \in (-\infty, +\infty)$

۲) $y = x^2 - 10x + 8, \quad x \in (-\infty, 0)$

۳) $y = \frac{1}{x}, \quad x \in (0, +\infty)$

۴) $y = \frac{1}{x}, \quad x \in (-\infty, 0)$

۵) $y = \tan x, \quad x \in \mathbb{R}$

۶) $y = \cos x, \quad x \in (0, \pi)$

۷) $y = \cot x, \quad x \in \mathbb{R}$

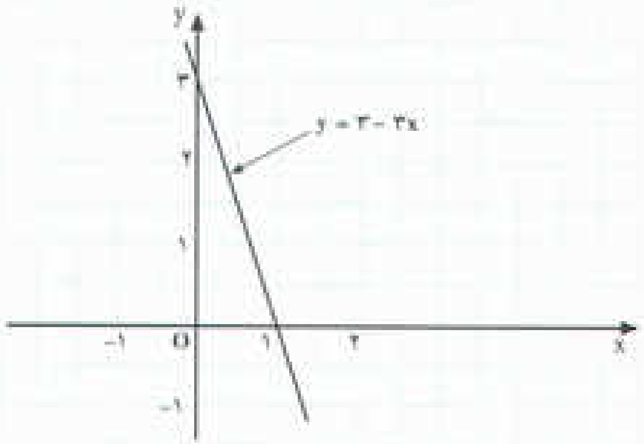
۸) $y = \cos x + x, \quad x \in \mathbb{R}$

مثال‌ها (در رابطه با قضیه‌ی ۲)

الف) $y = 3 - 3x, \quad x \in \mathbb{R}$

$$y' = -3 < 0$$

بنابراین، تابع $y = 3 - 3x$ نزولی است (شکل ۲۸ــ۳).



شکل ۲۸ــ۳ــ نمودار $y = 3 - 3x$

ب) $y = 1 - x - x^2, \quad x \in (0, +\infty)$

$$y' = -1 - 2x < 0, \quad x \in (0, +\infty)$$

بنابراین، تابع $y = 1 - x - x^2$ بر $(0, +\infty)$ نزولی است.
نمودار این تابع را رسم کنید و صحت نتیجه را بررسی کنید.

پ) $y = \frac{1 - x}{x}, \quad x \in (0, +\infty)$

$$y' = \frac{-1(x) - 1(1 - x)}{x^2} = \frac{-1}{x^2} < 0, \quad (x > 0)$$

بنابراین، تابع $y = \frac{1 - x}{x}$ بر $(0, +\infty)$ نزولی است.

ت) $y = \sin x - x, \quad x \in \mathbb{R}$

$$y' = \cos x - 1 \leq 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

بنابراین، تابع $y = \sin x - x$ نزولی است.

تمرین ۵ــ۳

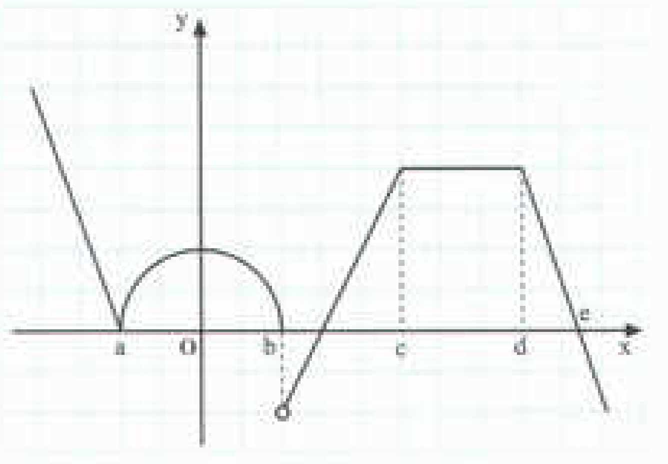
۱ــ تابع f در روبه‌رو تعریف شده است. بازه‌هایی را که f در آن‌ها صعودی یا نزولی است مشخص کنید.

$$f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x>0\\ 2x-1, & x\le 0\end{cases}$$

۲ــ تابع g در روبه‌رو تعریف شده است. ثابت کنید g بر $\mathbb{R}$ یکنواست.

$$g(x)=\begin{cases}-2x-1, & x\ge 0\\ x^2-1, & x<0\end{cases}$$

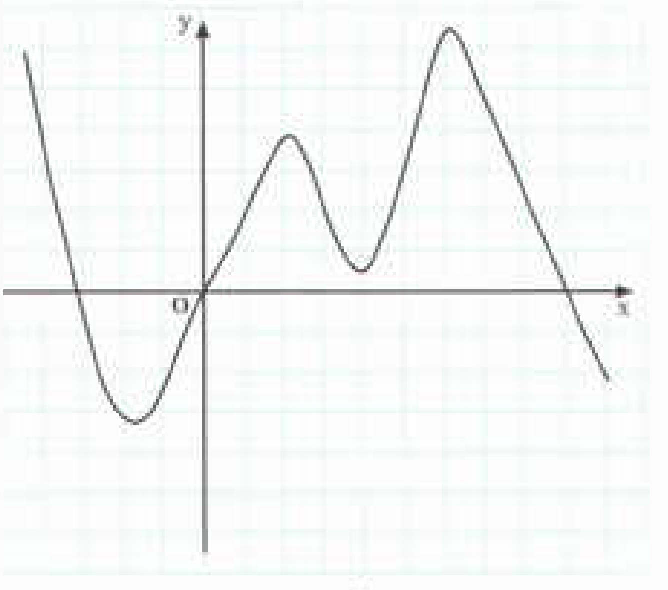
۳ــ با توجه به نمودار تابع $y=h(x)$ (شکل ۲۹ــ۳) بازه‌های یکنوایی آن را تعیین کنید.



شکل ۲۹ــ۳ــ نمودار $y=h(x)$

۴ــ تابع $y=\dfrac{2x+a}{x+a-2}$ داده شده است. حدود a را چنان تعیین کنید که این تابع همواره صعودی باشد.

۴ــ۲ــ۳ــ تغییرات تابع: منظور از بررسی تغییرات تابع، معین کردن قسمت‌هایی از دامنه‌ی تابع است که تابع در آن‌ها صعودی یا نزولی است. این مطلب در رسم دقیق‌تر نمودار تابع مفید است و باعث دقت و سرعت در رسم نمودار می‌شود.



شکل ۳۰ــ۳

مثال: تابع $y = -۲x^۲ + ۴x$ مفروض است، تغییرات این تابع را مورد بررسی قرار دهید.

حل: ابتدا y' را حساب می‌کنیم.

$$y' = -۴x + ۴$$

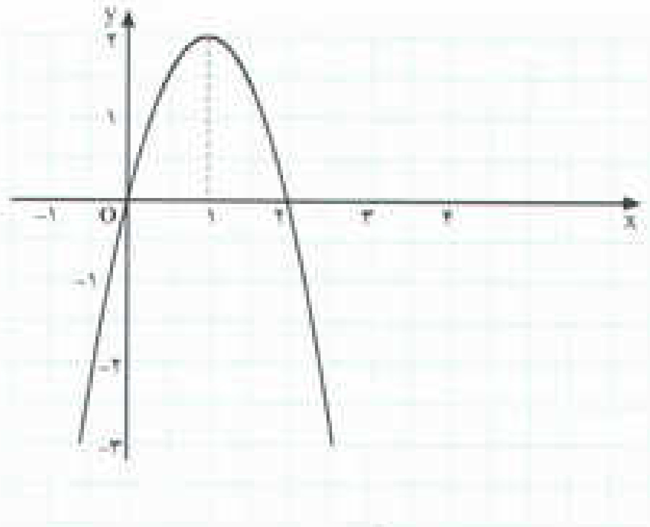
سپس y' را در جدول ۳ــ۳ تعیین علامت می‌کنیم، برای این منظور قرار می‌دهیم $y' = ۰$.

$$y' = ۰ \Rightarrow -۴x + ۴ = ۰ \Rightarrow x = ۱$$

با توجه به آنچه در مورد تابع‌های یکنوا گفته شد، جدول تغییرات، (جدول ۳ــ۳) و نمودار تابع در شکل ۳۱ــ۳ ملاحظه می‌شود. نمودار تابع، به کمک جدول و نقاطی که نمودار محورها را قطع می‌کند، رسم شده است.

جدول ۳ــ۳

x	$-\infty$		۱		۲		$+\infty$
y'		+	۰	−		−	
y	$-\infty$	$\nearrow$	۲	$\searrow$	۰	$\searrow$	$-\infty$



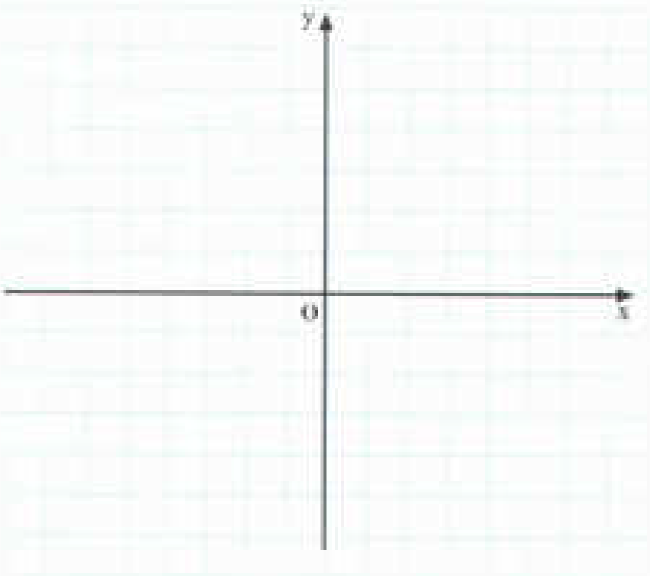
شکل ۳۱ــ۳

کار در کلاس ۷ــ۳

با توجه به مثال بالا، تغییرات تابع‌های زیر را بررسی کنید (از نمودار نیز می‌توانید استفاده کنید.) (شکل ۳۲ــ۳).

الف) $y = x^۲ - ۴x + ۳$

ب) $y = ۲x - ۸x^۲$



شکل ۳۲ــ۳

تمرین ۶ــ۳

تغییرات تابع‌های زیر را بررسی کنید (بدون رسم نمودار).

الف) $y = (x - ۳)^۲$

ب) $y = \frac{x^۳}{۳} - \frac{x^۲}{۲} - ۲x + ۱$

پ) $y = x(۲ - x)$

ت) $y = -x$

ث) $y = ۲$

۵ـ۲ـ۳ـ نقطه‌های ماکسیمم و مینیمم نسبی یک تابع:

فرض کنید می‌خواهیم مستطیلی رسم کنیم که محیط آن ۸ سانتی‌متر و مساحت آن ماکسیمم باشد. مطابق شکل ۳۳ـ۳ اگر طول و عرض مستطیل را x و y بنامیم داریم :

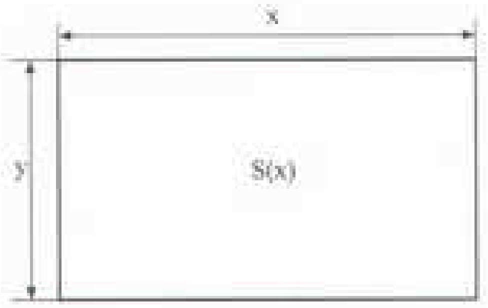
$$2(x+y)=8$$

و یا

$$x+y=4$$

و اگر مساحت مستطیل را با s(x) نمایش دهیم :

$$s(x)=xy=x(4-x)=4x-x^2$$

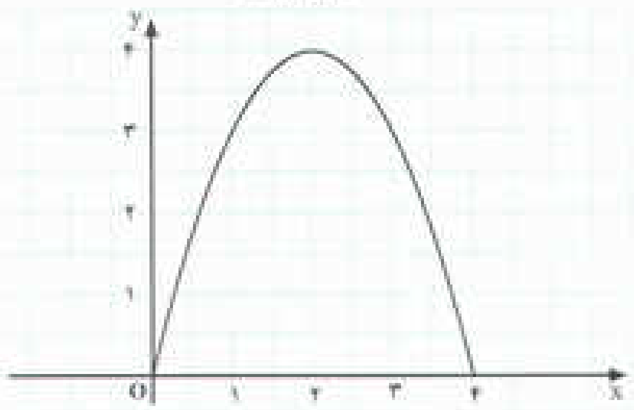


شکل ۳۳ـ۳

در شکل ۳۴ـ۳ نمودار تابع s(x) را دربازه‌ی (۰،۴) و جدول تغییرات آن را در جدول ۴ـ۳ ملاحظه می‌کنید.

$$s'(x)=4-2x=0 \Rightarrow x=2$$

$$s(2)=8-4=4 \quad \text{سانتی‌متر مربع}$$



شکل ۳۴ـ۳ـ نمودار $s(x)=4x-x^2$ در بازه‌ی (۰،۴)

ملاحظه می‌کنید که تابع s(x) در (۰،۲) صعودی و در (۲،۴) نزولی است. ضمناً، مشتق آن در (۰،۲) مثبت و در (۲،۴) منفی است.

s(x) به ازای $x=2$ بیشترین مقدار را دارد و ماکسیمم آن ۴ است. این تابع در نقطه‌ی (۲،۴) دارای ماکسیمم نسبی است.

جدول ۴ـ۳

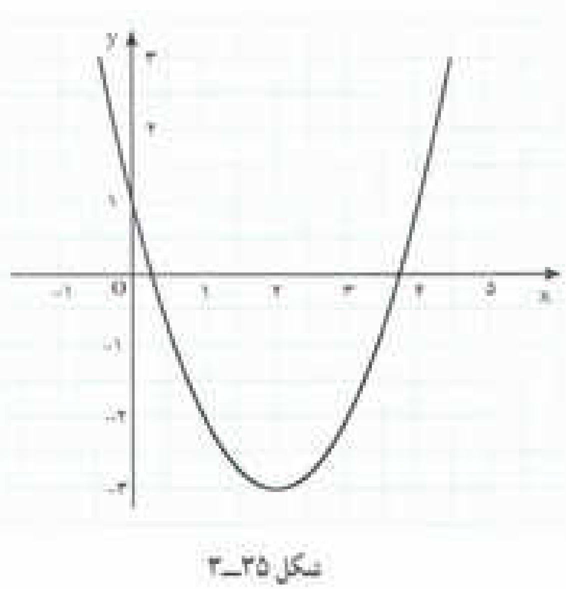
x	0		2		4
s'(x)		+	0	−	
s(x)	0	↗	4	↘	0

$$y=x^2-4x+1$$

$$y'=2x-4=0 \Rightarrow x=2$$

$$y(2)=-3$$

درشکل ۳۵ـ۳ نمودار $y=x^2-4x+1$ در $(-\infty,+\infty)$ رسم شده است و جدول تغییرات آن، جدول ۵ـ۳ نیز ملاحظه می‌شود. این تابع در $(-\infty,2)$ نزولی و در $(2,+\infty)$ صعودی است. لذا، در $x=2$ کمترین مقدار یعنی ۳− را داراست.



شکل ۳۵ـ۳

جدول ۵ـ۳

x	−∞		0		1		2		3		+∞
y'		−		−		−	0	+		+	
y	+∞	↘	1	↘	−2	↘	−3	↗	−2	↗	+∞

تعریف ۴. گوییم تابع f در نقطه‌ی $(x_۰, f(x_۰))$ دارای مینیمم نسبی است در صورتی که بازه‌ای باز شامل $x_۰$، مانند $(a, b) \subset D_f$ باشد به قسمی که برای هر x از این بازه:

$$f(x_۰) \le f(x)$$

$f(x_۰)$ را **اندازه‌ی مینیمم** نامیم.

تعریف ۵. گوییم تابع f در نقطه‌ی $(x_۰, f(x_۰))$ دارای ماکسیمم نسبی است در صورتی که بازه‌ای باز شامل $x_۰$، مانند $(a, b) \subset D_f$ باشد به قسمتی که برای هر x از این بازه:

$$f(x_۰) \ge f(x)$$

$f(x_۰)$ را **اندازه‌ی ماکسیمم** نامیم.

در شکل ۳۶ــ۳ نمودار $y = f(x)$ را ملاحظه می‌کنید که دارای چند نقطه‌ی ماکسیمم و مینیمم نسبی است.

تعریف ۶. نقاط ماکسیمم و مینیمم یک تابع را نقاط **اکسترمم** تابع نامند.

با توجه به آنچه در صفحه‌ی قبل گفته شده نقطه‌های ماکسیمم و مینیمم نسبی یک تابع را، که در تمام نقاط دامنه‌اش مشتق دارد، به طریق زیر حساب می‌کنیم.

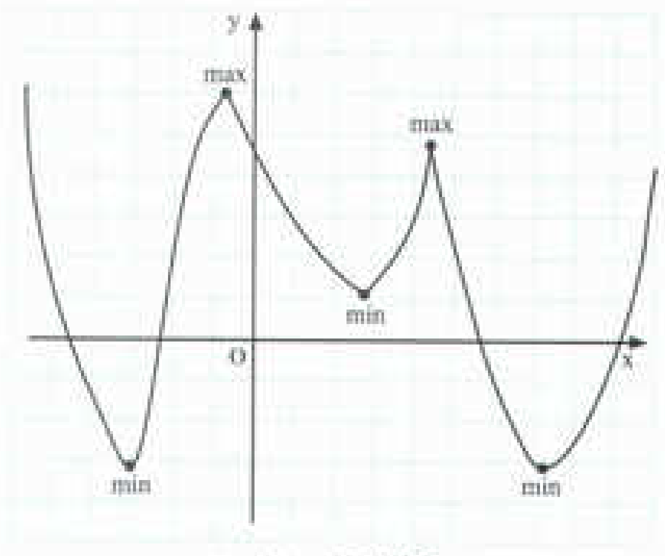
الف) y' را حساب می‌کنیم.

ب) ریشه‌های معادله‌ی $y' = ۰$ را به‌دست می‌آوریم.

پ) اگر y' در یک طرف یک ریشه‌ی مثبت (منفی) و در طرف دیگر آن منفی (مثبت) باشد تابع در آن نقطه ماکسیمم (مینیمم) نسبی است.

ت) در صورتی که y' در $x_۰$ صفر باشد ولی در دو طرف $x_۰$ دارای یک علامت باشد تابع در $x_۰$ ماکسیمم یا مینیمم نسبی ندارد.

در روبه‌رو دو مثال حل شده است.



شکل ۳۶ــ۳ــ نمودار $y = f(x)$

مثال‌ها:

۱) $y = x^۳ - x^۲ - ۵x + ۳$

$y' = ۳x^۲ - ۲x - ۵$

$$y' = ۰ \Rightarrow ۳x^۲ - ۲x - ۵ = ۰ \Rightarrow \begin{array}{l} x_۱ = -۱ \\ x_۲ = \frac{۵}{۳} \end{array}$$

جدول ۶ــ۳

x	$-\infty$		-۲		-۱		$\frac{۵}{۳}$		۲		$+\infty$
y'		+	۱۱	+	۰	−	۰	+	۳		
y	$-\infty$	↗	۰	↗	۵	↘	$\frac{-۱۲۱}{۲۷}$	↗	-۳		$+\infty$

تابع $y = x^۳ - x^۲ - ۵x + ۳$ در $(-۱, ۵)$ ماکسیمم نسبی و در $(\frac{۵}{۳}, \frac{-۱۲۱}{۲۷})$ مینیمم نسبی دارد.

۲) $y = ۲x^۴ - x^۲ + ۱$

$y' = ۸x^۳ - ۲x = ۲x(۴x^۲ - ۱)$

$y' = ۰ \Rightarrow x = ۰\ ,\ x = \pm\frac{۱}{۲}$

جدول ۷ــ۳

x	$-\infty$		$\frac{-۱}{۲}$		۰		$\frac{۱}{۲}$		$+\infty$
y'		−	۰	+	۰	−	۰	+	
y	$+\infty$	↘	$\frac{۷}{۸}$	↗	۱	↘	$\frac{۷}{۸}$	↗	$+\infty$

لذا، تابع y در $(-\frac{۱}{۲}, \frac{۷}{۸})$ مینیمم نسبی، در $(۰, ۱)$ ماکسیمم نسبی و در $(\frac{۱}{۲}, \frac{۷}{۸})$ مینیمم نسبی دارد.

فعالیت ۴ــ۳

تابع $y=(x-1)^3$ داده شده است.

۱ــ مشتق y را حساب کنید.

$y' =$

۲ــ ریشه‌های معادله‌ی $y'=0$ را به دست آورید.

$y' = 0 \Rightarrow$

۳ــ جدول تغییرات (جدول ۸ــ۳)، تابع را کامل کنید.

۴ــ آیا در نقطه‌ای که y' صفر می‌شود، y' تغییر علامت می‌دهد؟

۵ــ نمودار تابع را رسم کنید.

۶ــ علت این که تابع نقطه‌ی ماکسیمم یا مینیمم ندارد چیست؟

جدول ۸ــ۳

x	$-\infty$	$+\infty$
y'		
y	$-\infty$	$+\infty$

کار در کلاس ۸ــ۳

تابع $y=\frac{2x-1}{x+2}$ داده شده است.

۱ــ y' را حساب کنید.

۲ــ y' را تعیین علامت کنید.

۳ــ آیا این تابع نقطه‌ی اکسترمم دارد؟ چرا؟

جدول ۹ــ۳

x	
y'	
y	

مثال ۱: تابع f با ضابطه‌ی $y=ax^2+bx+3$ داده شده است، a و b را چنان بیابید که به ازای $x=2$ تابع دارای ماکسیمم یا مینیمم مساوی (-1) باشد.

حل ۱: اولاً مختصات نقطه‌ی اکسترمم $(2,-1)$ باید در ضابطه‌ی تابع صدق کند. پس:

$$-1=4a+2b+3 \Rightarrow 2a+b=-2 \qquad (1)$$

ثانیاً، باید $y'(2)=0$. بنابراین،

$$y'=2ax+b \Rightarrow 4a+b=0 \qquad (2)$$

$$(1) \text{ و } (2) \Rightarrow \begin{cases} 2a+b=-2 \\ 4a+b=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{a=1}\ ,\ \boxed{b=-4}$$

مثال ۲: در تابع $y = ax^2 + bx + c$ ضریب‌های a، b و c را چنان بیابید که نمودار تغییرات تابع محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض ۳ قطع کند و به ازای $x = 1$ تابع دارای ماکسیمم یا مینیممی مساوی ۴ باشد.

حل ۲: نقطه‌ی برخورد نمودار تغییرات تابع با محور عرض‌ها نقطه‌ی $(0,3)$ و نقطه‌ی اکسترمم این تابع $(1,4)$ است. بنابراین، نقطه‌ی $(0,3)$ روی نمودار تابع است:

$$(0,3) \Rightarrow \boxed{3 = c}$$

نقطه‌ی $(1,4)$ روی نمودار تابع است:

$$(1,4) \Rightarrow 4 = a + b + c \Rightarrow a + b = 1 \qquad (3)$$

باید $y'(1) = 0$:

$$y' = 2ax + b \Rightarrow 2a + b = 0 \qquad (4)$$

$$(3) \text{ و } (4) \Rightarrow \boxed{a = -1}\ ,\ \boxed{b = 2}$$

تمرین ۷ــ۳

۱ــ نقاط اکسترمم تابع‌های زیر را در بازه‌هایی که مشخص شده تعیین کنید.

الف) $y = \sin x,\quad x \in [0,\pi]$

ب) $y = \cos x,\quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

پ) $y = x - 2x^2,\quad x \in \mathbb{R}$

۲ــ تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = ax^3 + (a-1)x^2 + 4x$ داده شده است. مقدار a را چنان بیابید که در $x = -2$ تابع ماکسیمم یا مینیمم باشد.

۳ــ اگر $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ضریب‌های a، b، c و d را چنان تعیین کنید که برای $x = -1$ تابع دارای ماکسیمم یا مینیممی برابر ۸ باشد و نمودار تابع محور xها را در نقطه‌ی $(1,0)$ و محور yها را در نقطه‌ی $(0,5)$ قطع کند.

آزمون پایانی (۲)

محل پاسخ به سؤالات آزمون پایانی

۱ــ معادله‌ی خط مماس و خط قائم بر نمودار تابع $y = x^2 + 2x + 3$ را در $x = 1$ بنویسید.

۲ــ معادله‌ی خط قائم بر نمودار تابع $y = \cos^2 x + 2$ را در $x = \frac{\pi}{2}$ بنویسید.

۳ــ صعودی یا نزولی بودن تابع‌های زیر را به کمک تعیین علامت مشتق تابع مشخص کنید.

الف) $y = 2 - x^3, \quad x \in \mathbb{R}$

ب) $y = x^2 - 1 \ , \ x \in [0, +\infty)$

۴ــ تغییرات تابع زیر را معین کنید. سپس نمودار آن را رسم نمایید.

$$y = x^3 - 3x^2 + 2$$

۵ــ نقاط اکسترمم تابع زیر را تعیین کنید.

$$y = x^3 + x^2 - x - 1$$

۶ــ تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = ax^3 + 2ax^2 + 2x$ داده شده است. مقدار a را چنان تعیین کنید که تابع در $x = -1$ دارای ماکسیمم یا مینیمم باشد.

بخش سوم

فصل سوم

کاربردهای مشتق (۲)

هدف کلی

رسم دقیق نمودار تابع‌های متداول و تعیین تقریب یک تابع به کمک مشتق

هدف‌های رفتاری: انتظار می‌رود فراگیر پس از پایان این فصل بتواند :

۱ـ جهت تقعر منحنی نمودار یک تابع را تعیین کند.

۲ـ نمودار تابع‌های مورد نظر را، به کمک مشتق اول و دوم تابع، به‌طور دقیق رسم کند.

۳ـ مقدار تابع را در نقاط تعیین شده، به کمک مشتق، تخمین بزند.

پیش‌آزمون (۳)

محل پاسخ به سؤالات پیش‌آزمون

۱ــ در دو تابع زیر علامت y'' را تعیین کنید.

الف) $y = x - 4x^3 \;,\; x \in \mathbb{R}$

ب) $y = \cos x \;,\; x \in [0, \pi]$

۲ــ فرض کنید :

$$f(x) = x^3 - 1$$
$$g(x) = 1 - x^2$$

الف) حساب کنید :

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{g(x)}$$

ب) حساب کنید : $f'(x)$ و $g'(x)$.

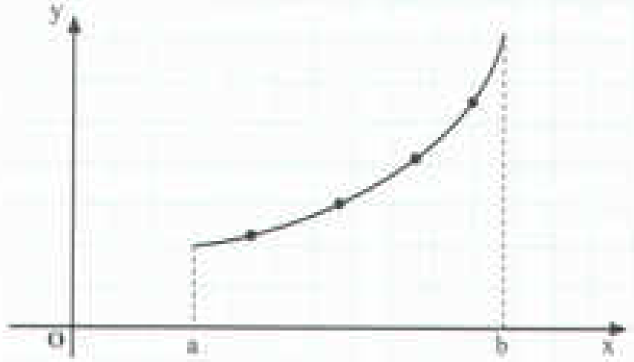
پ) حساب کنید :

$$\lim_{x \to 1} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

ت) مقدارهای به‌دست آمده از (الف) و (پ) را مقایسه کنید. آیا می‌توانید نتیجه‌ای به‌دست آورید؟

۳ــ با توجه به اطلاعاتی که از ریاضیات راهنمایی دارید، و بدون استفاده از ماشین‌حساب و یا قاعده‌ی جذرگیری، مقدار تقریبی عدد $\sqrt{38}$ را به‌دست آورید.

۳ــ۳ــ کاربردهای مشتق (۲)
۱ــ۳ــ۳ــ جهت تقعر منحنی



شکل۳۷ــ۳

فعالیت ۵ــ۳

در شکل‌های ۳۷ــ۳ و ۳۸ــ۳ نمودار دو تابع را ملاحظه می‌کنید که هردو در بازه‌ی (a,b) صعودی هستند.

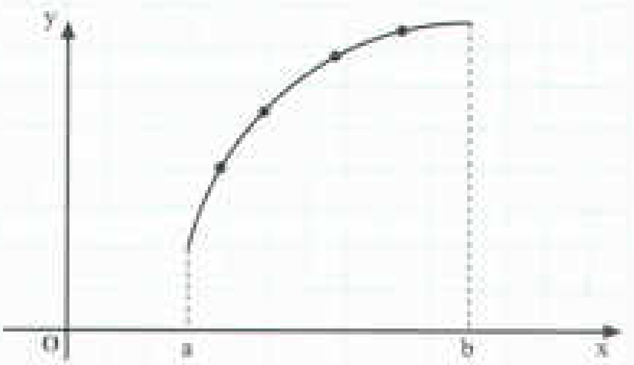
۱ــ خط‌های مماس در نقاط مشخص شده روی نمودار ۳۷ــ۳ را رسم کنید.

۲ــ نمودار ۳۷ــ۳ به **تمامی** در کدام سمت این خط‌های مماس قرار دارد؟

۳ــ آیا شیب خط‌های مماس با افزایش x رو به افزایش است؟

رفتار y' چگونه است؟ علامت y'' چیست؟ (از قضیه‌های ۱ و ۲ کمک بگیرید.)

در هر منحنی با این ویژگی‌ها تقعر (گودی) منحنی به‌طرف بالا (در جهت مثبت محور yها) است.



شکل ۳۸ــ۳

۴ــ خط‌های مماس در نقاط مشخص شده روی نمودار ۳۸ــ۳ را رسم کنید.

۵ــ نمودار ۳۸ــ۳ به **تمامی** در کدام سمت این خط‌های مماس قرار دارد؟

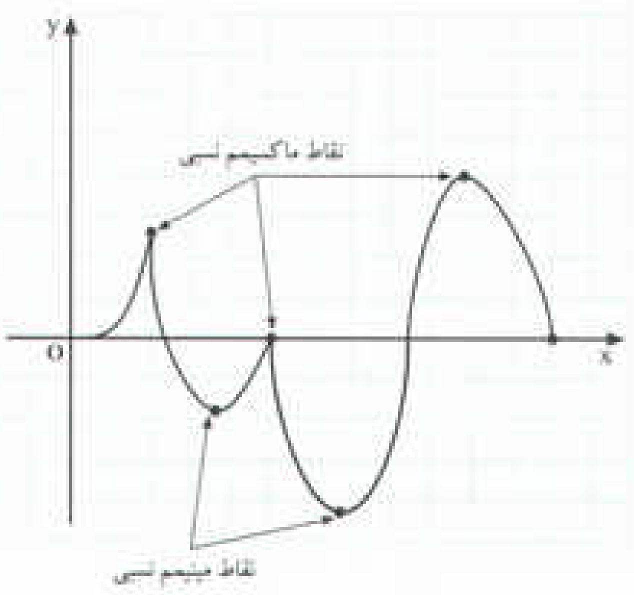
۶ــ آیا شیب خط‌های مماس با افزایش x، کاهش می‌یابد؟

رفتار y' چگونه است؟ علامت y'' چیست؟

در هر منحنی با این ویژگی‌ها تقعر (گودی) منحنی رو به پایین (در جهت منفی محور yها) است.

در شکل ۳۹ــ۳ نمودار یک تابع را ملاحظه می‌کنید که در بازه‌های مختلف جهت تقعر آن تغییر می‌کند.

با توجه به آنچه در فعالیت قبل بررسی شد، ممکن است دو تابع، در یک بازه، صعودی (نزولی) باشند ولی جهت تقعر آن‌ها متفاوت باشد(شکل ۳۹ــ۳).



شکل ۳۹ــ۳

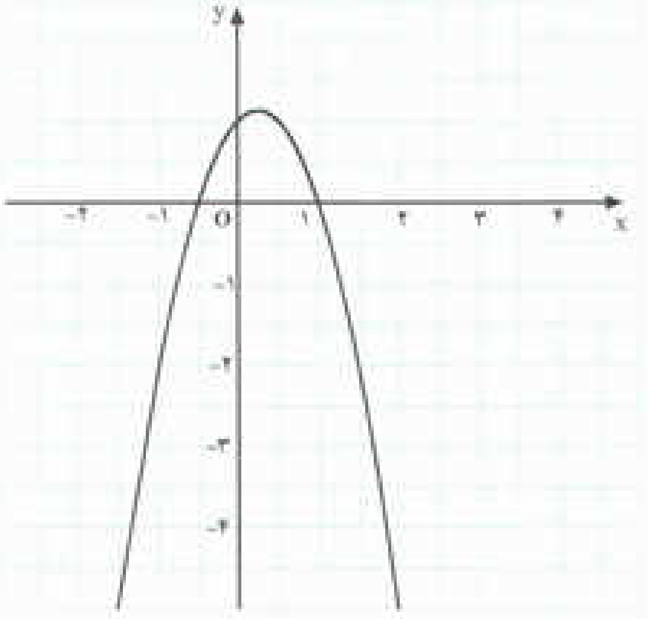
برای تعیین جهت تقعر یک منحنی در یک بازه باید علامت y'' را مشخص کرد. اگر در آن بازه $y'' > 0$، تقعر منحنی به‌طرف بالا (به‌طرف yهای مثبت) و اگر $y'' < 0$، تقعر منحنی به‌طرف پایین (به‌طرف yهای منفی) است.

مثال ۱: تابع $y = -۲x^۲ + x + ۱$ داده شده است. جهت تقعر نمودار این تابع را مشخص کنید (شکل ۴۰_۳).

حل: با توجه به علامت y'' جهت تقعر نمودار را تعیین می‌کنیم.

$$y' = -۴x + ۱, \quad y'' = -۴ < ۰$$

پس تقعر منحنی، همان‌طور که در نمودار آن ملاحظه می‌کنید، به‌طرف پایین است.



شکل ۴۰_۳

مثال ۲: تابع $y = x^۴ - ۶x^۲ - ۱۶$ داده شده است جهت تقعر آن را در بازه‌های مختلف تعیین کنید.

حل: علامت y'' را تعیین می‌کنیم.

$$y' = ۴x^۳ - ۱۲x, \quad y'' = ۱۲x^۲ - ۱۲ = ۰ \Rightarrow x = \pm ۱$$

جدول جهت تقعّر این تابع را در مقابل ملاحظه می‌کنید.

جدول ۱۰_۳

x	$-\infty$		-۱		۱		$+\infty$
y''		+	۰	−	۰	+	
جهت تقعر		به بالا		به پایین		به بالا	

تمرین ۸_۳

۱_ بدون رسم نمودار تابع‌های زیر، جهت تقعر آن‌ها را تعیین کنید.

الف) $y = ۵x^۲ - ۸x + ۳$

ب) $y = x^۲ + ۴x - ۳$

پ) $y = -x^۲ + ۲$

ت) $y = ۸x - ۲x^۲ + ۱$

آیا با توجه به نتیجه‌ی این تمرین، می‌توانید در مورد تقعر نمودار $y = ax^۲ + bx + c$ که در آن $a \neq ۰$ نظر بدهید؟

۲_ جهت تقعر منحنی نمایش تابع‌های زیر را، بدون رسم نمودار آن‌ها، تعیین کنید.

الف) $y = x^۴ + ۴x^۲ - ۱۲$

ب) $y = x^۴ - ۴x^۳ + ۶x^۲ + ۵$

۳_ تابع با ضابطه‌ی $y = (a-۲)x^۲ + ۳x - ۱$ داده شده است حدود a را چنان تعیین کنید که جهت تقعر منحنی نمایش این تابع همواره به‌طرف بالا (در جهت مثبت محور yها) باشد.

۲ـ۳ـ۳ـ قاعده‌ی هوپیتال: یکی دیگر از کاربردهای مشتق، تعیین حد کسرهایی است که حد صورت و مخرج آن‌ها وقتی $x \to a$ صفر می‌شود.

فرض کنید f و g دو تابع باشند به قسمی که:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$$

در این‌صورت، بررسی $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ به روش‌های معمول ساده نیست. امّا، اگر فرض کنیم که $f'(a)$ و $g'(a)$ وجود داشته باشند می‌توان نوشت: $(x \neq a)$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}$$

با توجه به تعریف مشتق در a داریم:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}\ ,\ (g'(a)\neq 0)$$

در روبه‌رو مثال‌های نمونه‌ای حل شده است. توجه دارید که اگر تابعی در a مشتق‌پذیر باشد در a پیوسته است. بنابراین،

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

نکته: در صورت برقراری شرایط، می‌توان چندین بار از قاعده‌ی هوپیتال استفاده کرد.

در مثال ۴ سه بار از قاعده‌ی هوپیتال استفاده شده است.

مثال‌های حل شده (در رابطه با قاعده‌ی هوپیتال)

۱) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = ?$

با توجه به این‌که $\sin 0 = 0$.

بنابر قاعده‌ی هوپیتال،

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

۲) $\lim_{x\to 1}\frac{x^8-1}{x^3-1} = ?$

قرار می‌دهیم $f(x) = x^8 - 1$ و $g(x) = x^3 - 1$ در این‌صورت،

$$f(1) = 0\ ,\ g(1) = 0$$

$$f'(x) = 8x^7,\ g'(x) = 3x^2$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^8-1}{x^3-1} = \lim_{x\to 1}\frac{8x^7}{3x^2} = \frac{8}{3}.$$

۳) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{3x} = \lim_{x\to 0}\frac{1+\tan^2 x}{3} = \frac{1}{3}$

۴) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{1+\tan^2 x - 1}{3x^2}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{3x^2}$$

مجدداً از قاعده‌ی هوپیتال استفاده می‌کنیم.

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\tan x(1+\tan^2 x)}{6x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2(1+\tan^2 x)^2 + 4\tan^2 x(1+\tan^2 x)}{6}$$

$$= \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

تمرین ۹ـ۳

حدهای زیر را به کمک قاعده‌ی هوپیتال حساب کنید. (می‌توانید از جدول مشتق تابع‌ها استفاده کنید).

الف) $\lim_{x\to \frac{1}{2}}\frac{8x^3-1}{2x-1}$

ب) $\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$

پ) $\lim_{x\to 0}\frac{2\cos x - 2 + x^2}{x^4}$

ت) $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{\cos x - \sin x}{x - \frac{\pi}{4}}$

ث) $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$

ج) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x \tan x}{x^2 \cos x}$

۳ـ۲ـ۳ـ رسم نمودار تابع: تاکنون با رسم نمودار تغییرات تابع‌ها به کمک نقطه‌یابی آشنا شده‌اید. این روش رسم، علاوه بر آن‌که برای برخی از تابع‌ها مشکل و وقت‌گیر است، از دقت کافی نیز برخوردار نیست. اکنون در مرحله‌ای هستیم که می‌توانیم با به‌کارگیری مشتق تابع، که صعودی یا نزولی بودن و نقاط اکسترمم تابع را به ما می‌دهد، روش کلی رسم نمودار دسته‌ی وسیعی از تابع‌ها را بیان کنیم.

برای رسم نمودار تابع $y = f(x)$ به‌ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

۱ـ دامنه‌ی تعریف تابع را، درصورتی که داده نشده باشد، تعیین می‌کنیم.

۲ـ حد تابع f را درصورتی که x بتواند به $+\infty$ یا $-\infty$ میل کند، در صورت لزوم، به‌دست می‌آوریم.

۳ـ y' را محاسبه و ریشه‌های $y' = 0$ را، در صورت وجود، به‌دست می‌آوریم. نقطه‌های اکسترمم تابع را، در صورت وجود، تعیین می‌کنیم.

۴ـ نقطه‌های برخورد نمودار تابع را با محورهای مختصات به‌دست می‌آوریم:

$$\left|\begin{array}{l} x = 0 \\ y = ? \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{l} y = 0 \\ x = ? \end{array}\right.$$

۵ـ جدول تغییرات تابع را، با درج مقدارهای x به‌ترتیب صعودی، تشکیل داده، y' را تعیین علامت و صعودی یا نزولی بودن تابع و نقطه‌های اکسترمم را، در صورت وجود، تعیین می‌کنیم.

۶ـ با توجه به جدول تغییرات تابع و نقاط ویژه‌ی مشخص شده، نمودار تابع را رسم می‌کنیم.

در شکل‌های ۴۱ـ۳ و ۴۲ـ۳ نمودار تغییرات دو تابع با توجه به دستورالعمل بالا رسم شده‌اند.

مثال:

۱) نمودار تابع $y = f(x) = x^2 - 2x - 3$ را رسم کنید.

حل: ۱ـ دامنه‌ی تغییرات این تابع $\mathbb{R}$ است. یعنی $D_f = \mathbb{R}$.

۲ـ واضح است که $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$.

۳ـ مشتق تابع را حساب می‌کنیم.

$$y' = 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$$

۴ـ نقطه‌های برخورد نمودار تابع را با محورها مشخص می‌کنیم:

$$\left|\begin{array}{l} x = 0 \\ y = -3 \end{array}\right.$$

$$y = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

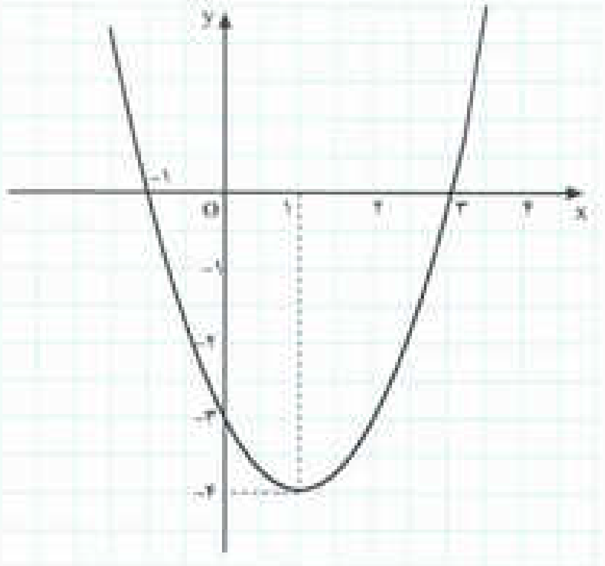
$$\left|\begin{array}{l} x = -1 \\ y = 0 \end{array}\right. , \qquad \left|\begin{array}{l} x = 3 \\ y = 0 \end{array}\right.$$

۵ـ جدول تغییرات تابع را رسم می‌کنیم:

جدول ۱۱ـ۳

x	$-\infty$	-1	0	1	3	$+\infty$
y'	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
y	$+\infty$	0	-3	-4	0	$+\infty$

۶ـ نمودار تابع را با توجه به جدول بالا و نقاط مشخص شده رسم می‌کنیم (شکل ۴۱ـ۳).



شکل ۴۱ـ۳

نکته‌ی ۱: در صورت لزوم برای رسم دقیق نمودار از علامت y'' نیز، برای تعیین جهت تقعر نمودار تابع می‌توان استفاده کرد.

نکته‌ی ۲: در صورت کافی نبودن نقطه‌های موجود در جدول، می‌توان مختصات یک یا چند نقطه‌ی دلخواه مناسب را به‌دست آورد.

نکته‌ی ۳: درصورتی که حل $f(x)=0$ میسر نباشد از آن صرف‌نظر کنید و به‌جای آن چند نقطه‌ی دیگر را مشخص کنید.

تمرین ۱۰ــ۳

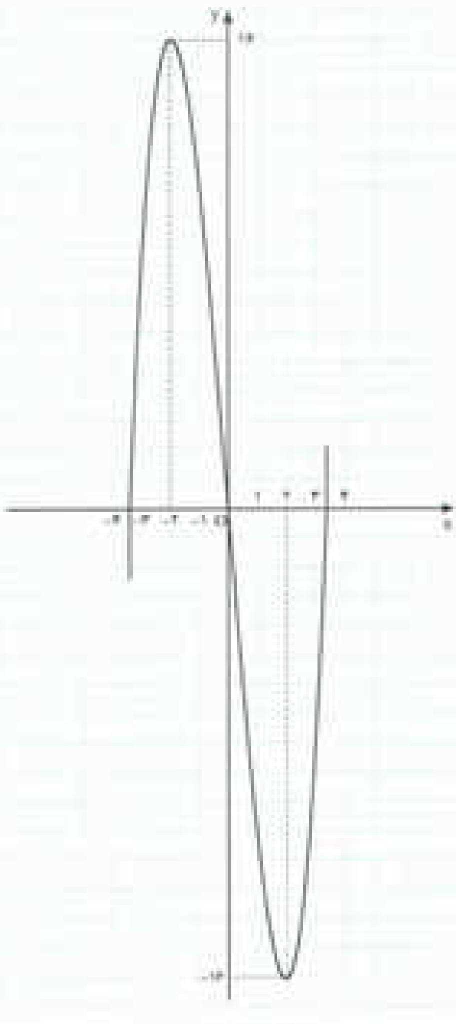
نمودار تابع‌های زیر را رسم کنید.

الف) $y=-2x^2+5x-3$

ب) $y=(x-2)^2$

پ) $y=-x^3+3x$

ت) $y=(x+1)^3$



شکل ۴۲ــ۳

۲) نمودار تابع $y=x^3-12x$ را رسم کنید.

۱ــ دامنه‌ی تابع $D_f=\mathbb{R}$

۲ــ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

۳ــ تعیین ریشه‌های $y'=0$

$$y'=3x^2-12=0$$

$$x^2=4\Rightarrow x=\pm 2$$

۴ــ تعیین نقطه‌های برخورد نمودار با محورها:

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

$$y=0\Rightarrow x(x^2-12)=0$$

$$\Rightarrow x=0 \text{ یا } x=\pm 2\sqrt{3}$$

۵ــ جدول تغییرات تابع را رسم می‌کنیم (جدول ۱۲ــ۳).

جدول ۱۲ــ۳

x	$-\infty$	$-2\sqrt{3}$	-2	0	2	$2\sqrt{3}$	$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	$-\infty$	0	16	0	-16	0	$+\infty$

۶ــ نمودار تابع را با توجه به جدول ۱۲ــ۳ و نقاط مشخص شده رسم می‌کنیم (شکل ۴۲ــ۳).

۴ـ۳ـ۳ـ کاربرد مشتق در تقریب: می‌دانیم که اگر تابع f مشتق‌پذیر باشد آنگاه:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$$

بنابراین، اگر x **نزدیک** a باشد می‌توان نوشت:

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\simeq f'(a)$$

و یا

$$(*)\quad f(x)\simeq f(a)+(x-a)f'(a)$$

لذا، اگر x و a معلوم باشند و محاسبه‌ی f(x) مشکل باشد (بدون ماشین‌حساب) می‌توان از مقدار سمت راست رابطه‌ی (*)، که تقریبی از f(x) است، استفاده کرد.

مثال: فرض کنید $f(x)=\sqrt{x}$ و می‌خواهیم $\sqrt{۱۷}$ را حساب کنیم.

حل: با توجه به این‌که $f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}$، با انتخاب $x=۱۷$ و $a=۱۶$ داریم:

$$\sqrt{۱۷}\simeq\sqrt{۱۶}+(۱۷-۱۶)\times\frac{۱}{۲\sqrt{۱۶}}$$

$$=۴+\frac{۱}{۸}=۴/۱۲۵.$$

توجه کنید که:

$$(۴/۱۲۵)^{۲}=۱۷/۰۱۵۶۲۵\simeq ۱۷$$

چند مثال نمونه‌ی دیگر در روبه‌رو ملاحظه می‌کنید. (به انتخاب مدبرانه‌ی a توجه کنید!)

تمرین ۱۱ـ۳

تقریبی از عددهای زیر به روش فوق حساب کنید.

$$\sqrt[۳]{۲۸},\quad \sqrt{۸۲},\quad \sqrt[۴]{۱۷},\quad \sqrt[۵]{۳۷},$$

$$\tan ۵۰^\circ\ ,\quad \cot ۴۰^\circ\ ,\quad \cos ۳۵^\circ$$

مثال‌های نمونه

۱) $\sqrt{۲۶}=?$

با فرض $x=۲۶$ ، $a=۲۵$ و $f(x)=\sqrt{x}$ داریم:

$$f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}$$

$$\sqrt{۲۶}\simeq\sqrt{۲۵}+(۲۶-۲۵)\times\frac{۱}{۲\sqrt{۲۵}}$$

$$=۵+\frac{۱}{۱۰}=۵/۱$$

$$(۵/۱)^{۲}=۲۶/۰۱\simeq ۲۶.$$

۲) $\sqrt[۳]{۷}=?$

با فرض $x=۷$ ، $a=۸$ و $f(x)=\sqrt[۳]{x}$ داریم:

$$f'(x)=\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^{۲}}}$$

$$\sqrt[۳]{۷}\simeq\sqrt[۳]{۸}+(۷-۸)\times\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{۸^{۲}}}$$

$$=۲-\frac{۱}{۳\times ۴}\simeq ۱/۹۱۷$$

۳) $\sqrt[۴]{۸۵}=?$

با فرض $x=۸۵$ ، $a=۸۱$ و $f(x)=\sqrt[۴]{x}$ داریم:

$$f'(x)=\frac{۱}{۴\sqrt[۴]{x^{۳}}}$$

$$\sqrt[۴]{۸۵}\simeq\sqrt[۴]{۸۱}+(۸۵-۸۱)\times\frac{۱}{۴\sqrt[۴]{۸۱^{۳}}}$$

$$=۳+\frac{۱}{۲۷}\simeq ۳/۰۳۷$$

۴) $\sin ۶۵^\circ=?$

با فرض $x=۶۵^\circ$ ، $a=۶۰^\circ$ و $f(x)=\sin x$ داریم:

$$f'(x)=\cos x\ ,$$

$$f(x)\simeq f(a)+(x-a)f'(a)$$

($x-a$ باید برحسب رادیان باشد)

$$\sin ۶۵^\circ\simeq\sin ۶۰^\circ+(۶۵-۶۰)\times\frac{\pi}{۱۸۰}\times\cos ۶۰^\circ$$

$$=\frac{\sqrt{۳}}{۲}+\frac{\pi}{۳۶}\times\frac{۱}{۲}\simeq ۰/۹۱$$

آزمون پایانی (۳)

محل پاسخ به سؤالات آزمون پایانی

۱ــ جهت تقعر منحنی نمایش تابع‌های زیر را، بدون رسم نمودار آن‌ها، تعیین کنید.

الف) $y = x^{۴} - x^{۳} + ۲x^{۲} + ۸ \quad , \quad x \in \mathbb{R}$

ب) $y = x^{۳} - ۴x^{۲} + x - ۱ \quad , \quad x \in \mathbb{R}$

۲ــ حدهای زیر را به کمک قاعده‌ی هوپیتال حساب کنید.

الف) $\lim\limits_{x \to ۰} \dfrac{\cos x - ۱}{x}$

ب) $\lim\limits_{x \to \frac{۱}{۲}} \dfrac{۸x^{۳} - ۱}{۱ - ۲x}$

پ) $\lim\limits_{x \to ۰} \dfrac{۱ - \cos x}{x^{۲}}$

۳ــ نمودار تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = -۲x^{۳} + ۶x^{۲} + ۱$ را، با تعیین رفتار آن و نقاط اکسترمم آن، رسم کنید.

۴ــ با استفاده از مشتق تابع‌های مناسبی که درنظر می‌گیرید، تقریبی از مقدارهای زیر را به‌دست آورید :

$\sqrt{۳۵} \quad , \quad \sin ۵۰^\circ$

بخش سوم

فصل چهارم

کاربردهای مشتق (۳)

هدف کلی

مدل‌سازی مسائل ساده و حل مسائل بهینه‌سازی

هدف‌های رفتاری: انتظار می‌رود فراگیر پس از پایان این فصل بتواند:

۱ــ برای مسائل ساده‌ای در زمینه‌ی تعیین محیط اشکال هندسی مدل‌سازی کند.

۲ــ مسائل ساده‌ای را در زمینه‌ی مساحت اشکال هندسی مدل‌سازی کند.

۳ــ مسائل ساده‌ای را در زمینه‌ی حجم و سطح اجسام مدل‌سازی کند.

۴ــ برحسب مورد، مسئله‌های مینیمم‌سازی موردنظر را، به کمک مشتق، حل کند.

۵ــ برحسب مورد، مسئله‌های ماکسیمم‌سازی موردنظر را، به کمک مشتق، حل کند.

پیش‌آزمون (۴)

۱ــ مقوایی به شکل مربع به ضلع ۵۰ سانتی‌متر داریم. مطابق شکل ۴۳ــ۳ از چهار گوشه‌ی آن چهار مربع به ضلع ۱۰ سانتی‌متر می‌بریم. با مقوای باقی‌مانده یک جعبه‌ی درباز می‌سازیم. حجم این جعبه را حساب کنید.

۲ــ مکعب مستطیلی به ابعاد x ، 2x و 2 − x سانتی‌متر داریم. حجم این مکعب مستطیل را حساب کنید. دامنه‌ی تغییرات x را نیز به‌دست آورید.

۳ــ فرض کنید مثلث ABC متساوی‌الاضلاع و هر ضلع آن ۳۰ سانتی‌متر است. اگر BE = ۵، مساحت مستطیل DEFG را حساب کنید (شکل ۴۴ــ۳).

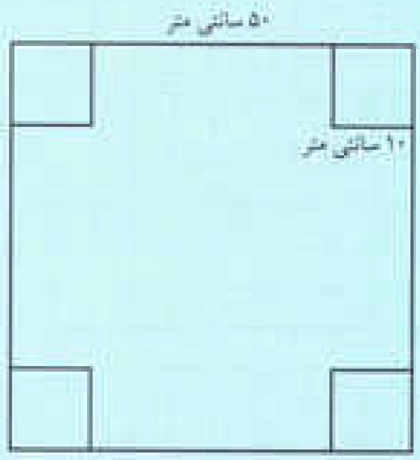
۴ــ مولد یک مخروط ۵۰ سانتی‌متر است. اگر شعاع قاعده‌ی مخروط ۳۰ سانتی‌متر باشد حجم مخروط را حساب کنید.

۵ــ ماکسیمم تابع‌های زیر را در بازه‌های مشخص شده تعیین کنید.

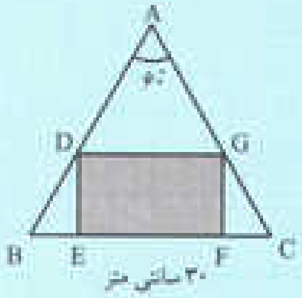
الف) $y = 4x^3 - 96x^2 + 576x \quad , \quad x > 0$

ب) $y = 4x^2 + \frac{216}{x} \quad , \quad x > 0$

محل پاسخ به سؤالات پیش‌آزمون



شکل ۴۳ــ۳ (به مقیاس $\frac{1}{10}$)



شکل ۴۴ــ۳ (به مقیاس $\frac{1}{10}$)

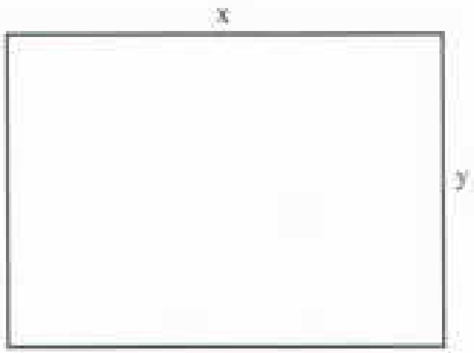
۴ـ۳ـ کاربردهای مشتق (۳)

۱ـ۴ـ۳ـ کاربرد مشتق در بهینه‌سازی: اصولاً در زندگی روزمره هرکسی در حال مینیمم کردن یا ماکسیمم کردن چیزی است.

در ریاضیات نیز مسائلی وجود دارد که در ارتباط با تعیین بیشترین مساحت و کمترین محیط، یا بیشترین تولید و کمترین هزینه و غیره می‌باشند.

در این قسمت با بیان مثال‌هایی مطلب را توضیح می‌دهیم.

مثال ۱: محیط مستطیلی ۲۸ متر است. طول و عرض این مستطیل را چنان تعیین کنید که مساحت آن ماکسیمم باشد (شکل ۴۵ـ۳).



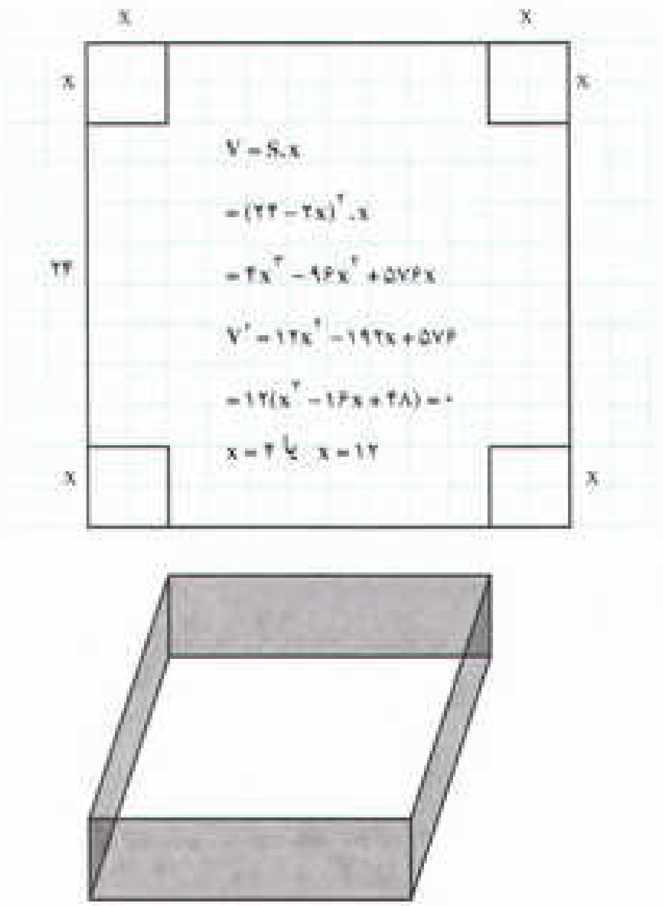
شکل ۴۵ـ۳

حل۱: طول مستطیل را x و عرض آن را y فرض می‌کنیم. سعی می‌کنیم مساحت مستطیل را برحسب یک متغیر بنویسیم. برای این منظور S را مساحت مستطیل می‌نامیم و محاسبات روبه‌رو را انجام می‌دهیم. برای ماکسیمم کردن S مشتق آن را مساوی صفر قرار می‌دهیم. بنابراین، طول و عرض مستطیل برابر و مساوی ۷ متر است.

$$\text{محیط مستطیل} = ۲(x+y) = ۲۸$$
$$\Rightarrow x+y=۱۴ \Rightarrow y=۱۴-x$$
$$S = x.y = x(۱۴-x) = ۱۴x - x^۲$$
$$S' = ۱۴ - ۲x = ۰ \Rightarrow x = ۷ \text{ متر}$$
$$\Rightarrow y = ۱۴ - x = ۷ \text{ متر}$$

مثال ۲: می‌خواهیم با بریدن چهار مربع از گوشه‌های یک مقوای مربع شکل به ضلع ۲۴ سانتی‌متر، یک جعبه‌ی درباز بسازیم که بیشترین حجم را داشته باشد. ضلع مربعی که باید بریده شود تعیین کنید. (شکل روبه‌رو)

حل۲: طول ضلع مربع‌هایی را که باید بریده شوند x ، سطح قاعده‌ی جعبه را S و حجم آن را V می‌نامیم. حجم جعبه در روبه‌رو حساب شده است. دامنه‌ی تغییرات x چیست؟



$$V = S.x$$
$$= (۲۴-۲x)^۲.x$$
$$= ۴x^۳ - ۹۶x^۲ + ۵۷۶x$$
$$V' = ۱۲x^۲ - ۱۹۲x + ۵۷۶$$
$$= ۱۲(x^۲ - ۱۶x + ۴۸) = ۰$$
$$x = ۴ \text{ یا } x = ۱۲$$

شکل ۴۶ـ۳

اگر به یک ضلع مقوا توجه کنید ملاحظه می‌کنید که :

$$۰ < x < ۱۲$$

(توجه کنید که اگر $x = ۱۲$ جعبه‌ای ساخته نمی‌شود. چرا؟)

با توجه به این که V' در $(۰,۴)$ مثبت و در $(۴,۱۲)$ منفی است V در $x = ۴$ ماکسیمم می‌شود. (جدول تغییرات V را رسم کنید.)

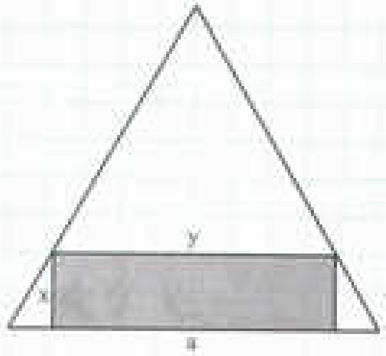
حجم ماکسیمم ۱۰۲۴ سانتی‌متر مکعب است. (چرا؟)

فعالیت ۶ــ۳

در یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a ، مطابق شکل ۴۷ــ۳، مستطیلی محاط کنید که مساحت آن ماکسیمم باشد.

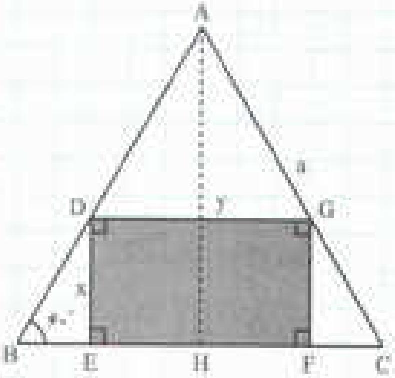
کافی است مساحت مستطیل DEFG را برحسب یک متغیر بیان کنیم و بعد به کمک مشتق ماکسیمم آن را حساب کنیم. یک ضلع مستطیل را x و ضلع دیگر آن را y می‌نامیم.

برای این منظور کارهای زیر را انجام دهید.



شکل ۴۷ــ۳

۱) با توجه به این که $AB = a$ و $BH = \frac{a}{2}$ ، نشان دهید که $AH = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ ، (شکل ۴۸ــ۳).



شکل ۴۸ــ۳

۲) در مثلث BDE ، tanB را حساب کنید.

۳) با توجه به مرحله‌ی ۲ نشان دهید که :

$$BE = \frac{x}{\sqrt{3}}$$

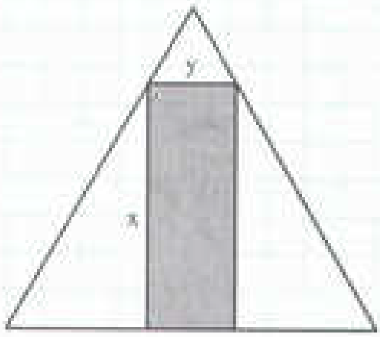
۴) نشان دهید که :

$$y = EF = a - 2BE = a - \frac{2x}{\sqrt{3}}$$

۵) اگر s(x) مساحت مستطیل باشد،

$$s(x) = xy = x(a - \frac{2x}{\sqrt{3}})$$

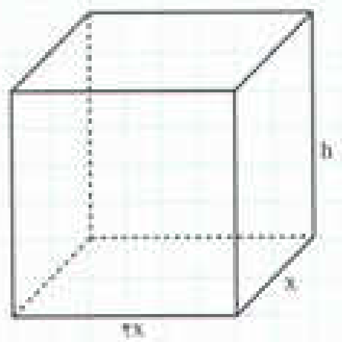
با محاسبه‌ی $s'(x)$ و تعیین ریشه‌ی $s'(x) = 0$ مقدار x را حساب کنید.



شکل ۴۹ــ۳

۶) نشان دهید که ماکسیمم مساحت مستطیل برابر $\frac{\sqrt{3}a^2}{8}$ است.

مثال ۳: مکعب مستطیلی به حجم ثابت ۷۲ متر مکعب داریم. یک ضلع قاعده‌ی این مکعب مستطیل دو برابر ضلع دیگر آن است. ابعاد این مکعب مستطیل را چنان بیابید که سطح کل آن ماکسیمم باشد (شکل ۵۰ــ۳).



شکل ۵۰ــ۳

حل۳: ارتفاع مکعب مستطیل را h ، سطح کل آن را S و حجم آن را V می‌نامیم. محاسبات لازم در روبه‌رو انجام شده است.

$$\text{مساحت قاعده‌ی مکعب مستطیل} = ۲x.x = ۲x^۲$$

$$V = ۲x^۲.h \Rightarrow ۲hx^۲ = ۷۲$$

$$\Rightarrow h = \frac{۳۶}{x^۲}$$

توجه کنید که سطح کل برابر سطح جانبی به اضافه‌ی مساحت دو قاعده‌ی مکعب مستطیل است.

$$\text{محیط قاعده‌ی مکعب مستطیل} = ۲(۲x + x) = ۶x$$

$$\text{سطح جانبی مکعب مستطیل} = ۶x.h = ۶hx$$

$$S = ۶hx + ۲(۲x^۲) = ۴x^۲ + ۶hx$$

پس از بیان S برحسب متغیر x ، برای تعیین ماکسیمم آن باید ریشه‌ی $S'(x) = ۰$ را به‌دست آوریم. این کار در روبه‌رو انجام شده است.

$$S = ۴x^۲ + \frac{۲۱۶}{x}$$

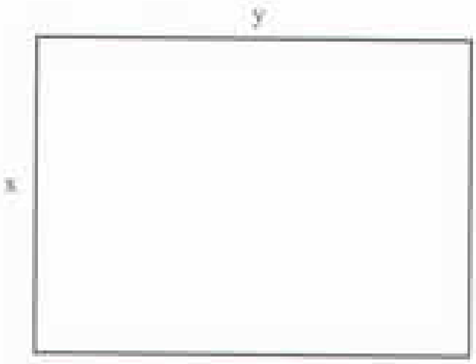
$$S' = ۸x - \frac{۲۱۶}{x^۲} = ۰$$

$$\Rightarrow \frac{۸x^۳ - ۲۱۶}{x^۲} = ۰ \Rightarrow x = ۳ \quad \text{متر}$$

برای محاسبه‌ی سطح کل ماکسیمم مقدار S را به ازای $x = ۳$ حساب می‌کنیم.

$$S(۳) = ۴ \times ۳^۲ + \frac{۲۱۶}{۳} = ۳۶ + ۷۲ = ۱۰۸ \quad \text{مترمربع}$$

مثال ۴: می‌خواهیم قطعه زمینی مستطیل شکل به مساحت ۴۰۰۰۰ مترمربع را، از یک زمین وسیع، انتخاب و حصارکشی کنیم. ابعاد این مستطیل را طوری بیابید که هزینه‌ی حصارکشی کمترین مقدار باشد.



شکل ۵۱ـ۳

حل ۴: نوع حصارکشی و انتخاب مصالح مربوط هرچه باشد محیط زمین انتخابی باید کمترین اندازه را داشته باشد (چرا؟). بنابراین، اگر ضلع‌های مستطیل را x و y بنامیم، (شکل ۵۱ـ۳)، باید داشته باشیم.

$$(1) \qquad xy = 40000$$

$$(2) \qquad P = 2(x+y)$$

از (۱) داریم

$$y = \frac{40000}{x}$$

اگر مقدار y را در (۲) قرار دهیم:

$$P(x) = 2\left(x + \frac{40000}{x}\right)$$

برای تعیین مینیمم P(x) چنین عمل می‌کنیم:

$$P'(x) = 2\left(1 - \frac{40000}{x^2}\right) = 0$$

که از آن نتیجه می‌شود (چون x اندازه‌ی ضلع مستطیل است):

$$x = 200 \text{ متر}$$

در نتیجه، متر $y = 200$.

تمرین ۱۲ـ۳

اگر بخواهیم در این قطعه زمین چهار ردیف سیم خاردار بکشیم و بهای هر متر سیم خاردار ۵۰۰ ریال باشد، هزینه‌ی خرید سیم خاردار لازم چقدر می‌شود؟

فعالیت ۷ـ۳

اندازه‌ی مولد یک خیمه‌ی مخروطی شکل برابر l است. اندازه‌ی تیرک عمودی این خیمه را چنان تعیین کنید که حجم آن، یعنی فضای قابل استفاده، بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.

حل: مطابق شکل روبه‌رو، اندازه‌ی تیر عمودی یعنی TH را h و شعاع قاعده‌ی خیمه را r و حجم آن را v می‌گیریم. برای تعیین جواب کارهای زیر را انجام دهید.

۱) فرمول حجم مخروط را بنویسید.

۲) با توجه به مثلث قائم‌الزاویه TAH ، رابطه‌ی بین l، h و r را به دست آورید.

۳) با استفاده از دو رابطه‌ای که به‌دست آورده‌اید v را برحسب l و h بنویسید.

۴) آیا به فرمول زیر رسیده‌اید.

$$v=\frac{\pi}{3}(l^2-h^2)h$$

۵) دامنه‌ی تغییرات h چیست؟

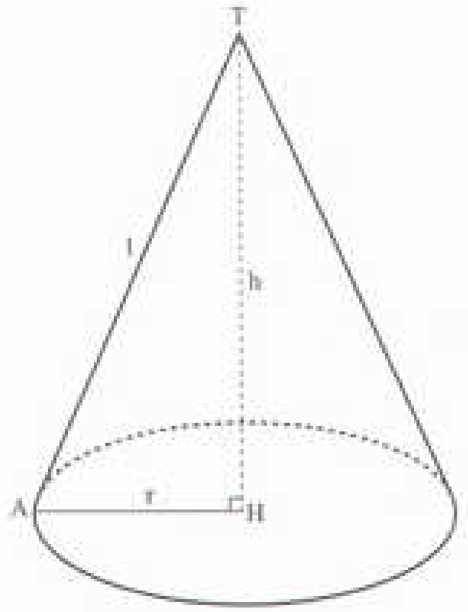
۶) v' را حساب کنید.

۷) ریشه‌های معادله‌ی $v'=0$ را به‌دست آورید. کدام ریشه قابل قبول است؟

۸) ماکسیمم مقدار v را به‌دست آورید.

۹) آیا بیشترین حجم خیمه $\frac{2\pi l^3}{9\sqrt{3}}$ است؟

۱۰) اگر $l=5\sqrt{3}m$ بیشترین حجم خیمه چقدر است؟

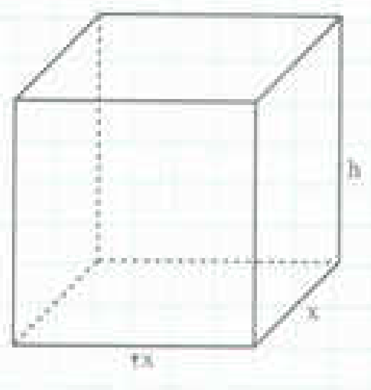


شکل ۵۲ـ۳ـ یک خیمه به ارتفاع TH=h ، شعاع قاعده‌ی AH = r و یال TA = l

تمرین ۱۳ــ۳

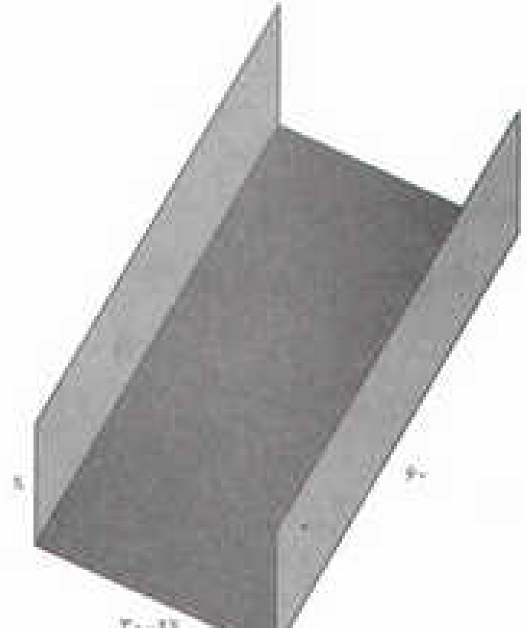
۱) عدد ۳۶ را به دو جزء چنان تقسیم کنید که حاصل‌ضربشان بیشترین مقدار ممکن باشد.

۲) می‌خواهیم مکعب مستطیلی به مساحت کل ۲۴۰ سانتی‌متر مربع بسازیم که یک ضلع قاعده‌ی آن دو برابر ضلع دیگر قاعده‌اش باشد. ارتفاع این مکعب مستطیل را چنان بیابید که حجم آن ماکسیمم باشد (شکل ۵۳ــ۳).



شکل ۵۳ــ۳

۳) ورقه‌ای فلزی به شکل مستطیل با ابعاد ۳۰ سانتی‌متر و ۶۰ سانتی‌متر داریم. می‌خواهیم ناودانی که کف آن به شکل مستطیل و طول آن ۶۰ سانتی‌متر باشد، بسازیم. این کار را چگونه انجام دهیم تا بیشترین آب از این ناودان عبور کند؟ مسئله را در حالتی که طول کف ناودان ۳۰ سانتی‌متر باشد نیز حل کنید (شکل ۵۴ــ۳).



شکل ۵۴ــ۳

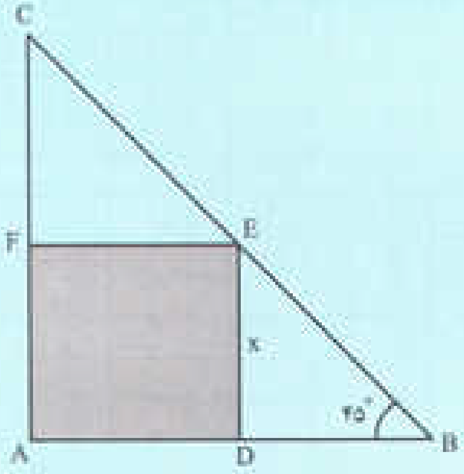
آزمون پایانی (۴)

۱ــ محیط قاعده‌ی یک مکعب مستطیل ۳۶ متر است. اگر ارتفاع این مکعب ۱۰ متر باشد ابعاد قاعده‌ی آن را چنان تعیین کنید که حجم آن بیشترین مقدار را داشته باشد.

۲ــ مثلث ABC قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین است (شکل ۵۵ــ۳). اگر طول ساق AB ۱۰ سانتی‌متر باشد، DE = x را چنان تعیین کنید که مساحت مستطیل ADEF ماکسیمم باشد.

۳ــ ارتفاع یک مکعب مستطیل مساوی محیط قاعده‌ی آن است. اگر مجموع ابعاد این مکعب مستطیل ۳۶ متر باشد بیشترین حجم آن را تعیین کنید. جواب: ۸۶۴ متر مکعب

محل پاسخ به سؤالات آزمون پایانی



شکل ۵۵ــ۳ (با مقیاس $\frac{1}{4}$)

تمرین‌های تکمیلی بخش سوم

۱) اگر $f(x)=x^2-4x$ باشند، حد زیر را حساب کنید.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

۲) مشتق هریک از تابع‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $y=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x-2$

ب) $y=(x^2-1)(x^2+1)(x^4+1)$

پ) $y=\frac{-2x^2+x-2}{(x-1)^2}$

ت) $y=\sqrt[3]{2x^2-x+3}$

ث) $y=\sin x\cos x+\cos^2 x$

ج) $y=\sin(\frac{\pi}{4}-2x)\cos(x+\frac{\pi}{4})$

چ) $y=\tan\frac{2}{x}+\cot\frac{1}{x}$

ح) $y=\frac{1}{3}\sin 3x+3\cos\frac{x}{3}$

۳) اگر $y=u^2-5$ و $u=\sqrt{x+2}$ باشند، y'_x را به‌دست آورید.

۴) معادله‌ی خط مماس و معادله‌ی خط قائم بر نمودار تابع‌های زیر را در نقطه‌هایی از این نمودارها که x آن‌ها داده شده است، بنویسید.

الف) $y=x^3-3x^2-2 \quad , \quad x=-1$

ب) $y=\cos^2 x+\cos x \quad , \quad x=\frac{\pi}{3}$

پ) $y=\sqrt{x-2} \quad , \quad x=3$

۵) رفتار هریک از تابع‌های زیر را در بازه‌ی داده شده تعیین کنید.

الف) $y=-x^2+4x-2 \quad , \quad x\in(1,3)$

ب) $y=\frac{x-1}{x} \quad , \quad x\in(-\infty,0)$

پ) $y=2\cos x \quad , \quad x\in(\frac{\pi}{2},\pi)$

۶) جهت تغییرات هریک از تابع‌های زیر و نقطه‌های اکسترمم آن‌ها را، در صورت وجود، تعیین کنید.

الف) $y=(x-2)^2(2x-3)$

ب) $y=-4x^2+x-1$

پ) $y=x^3+x^2+x$

۷) مقدارهای a و b را چنان بیابید که نقطه‌ی $(-1,4)$، یک نقطه‌ی اکسترمم تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=ax^3+bx+2$ باشد.

۸) نقطه‌های اکسترمم تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\sin^2 x+\cos x$ را در بازه‌ی $[0\,,\,\pi]$ تعیین کنید.

منابع

1- Joshi, N. A. , Diwan, M. J. , Joshi, Vigay V. , Vaida, A. S. & Krishnann, S. (2000) Differential Equations and Calculus. Sheth Publishers PVT. LTD.

2- Barnett, Raymond A. (1979) College Algebra, Second Edition. McGraw - Hill Book Company.

3- Bradley Gerald L. and Smith Karl J. (1995) Single Variable Calculus. Prentice Hall, Inc.

4- Marsden Jerrold and Weinstein Alan (1980) Calculus 1, Springer- Verlag.

۵ـ رابرت الیس، دنی گولیک، (۱۳۷۳) حساب دیفرانسیل و انتگرال با هندسه‌ی تحلیلی. ترجمه‌ی دکتر علی‌اکبر عالم‌زاده، انتشارات پژوهش ۱۳۷۳.

۶ـ بابلیان، اسماعیل و همکاران (۱۳۸۰)، **ریاضیات ۱ و ریاضیات ۲** : نظری (رشته‌های علوم تجربی ـ ریاضی و فیزیک ـ فنی و حرفه‌ای). سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

۷ـ رستمی، محمد هاشم و همکاران (۱۳۸۱)، **ریاضیات ۳** : نظری (رشته‌ی علوم تجربی). سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

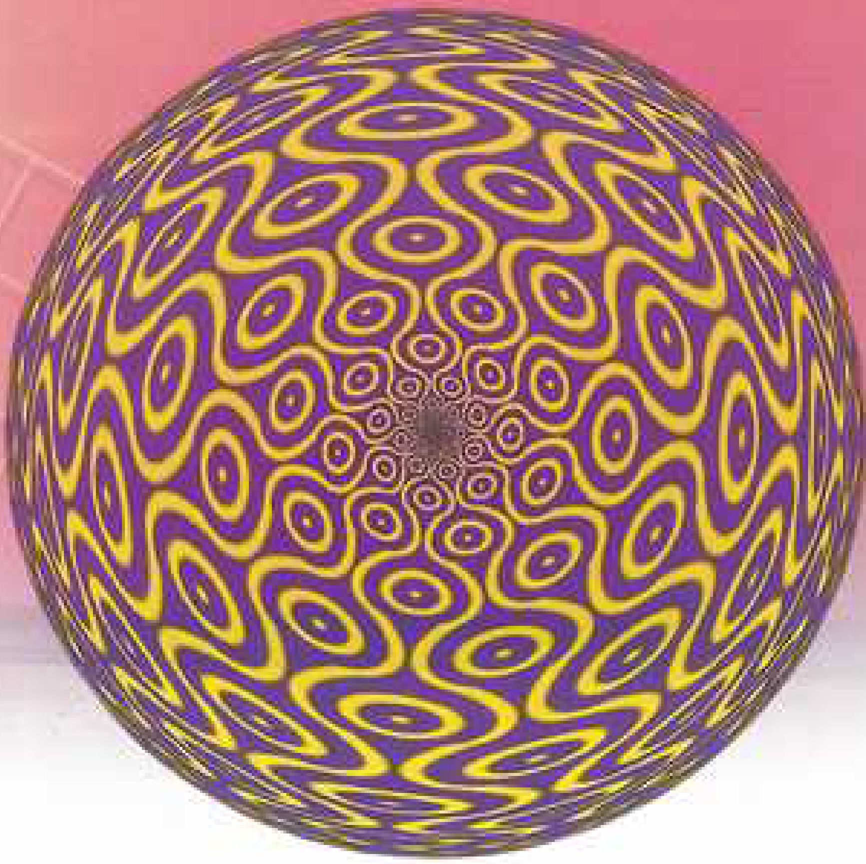
۸ـ گویا، زهرا و گویا، مریم (۱۳۸۰)، **ریاضی** : نظری (رشته‌های ادبیات و علوم انسانی ـ علوم و معارف اسلامی). سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

۹ـ پارپاب، خلیل و همکاران (۱۳۸۰)، **ریاضی ۵** : فنی وحرفه‌ای (کلیه‌ی رشته‌های زمینه صنعت و رشته‌های کامپیوتر و ماشین‌های کشاورزی). سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

۱۰ـ بابلیان، اسماعیل (۱۳۷۷)، **ویژگی‌ها و تولید فرکتال‌ها**. بیست و نهمین کنفرانس ریاضی کشور، دانشگاه صنعتی امیرکبیر.

۱۱ـ بابلیان، اسماعیل (۱۳۷۹)، **استفاده از کامپیوتر در اثبات احکام ریاضی**. مجله‌ی رشد آموزش ریاضی، شماره‌های ۵۹ و ۶۰.

۱۲ـ رستمی، محمدهاشم (۱۳۷۷)، **جبر پایه**، انتشارات مدرسه.



شابک ۹۶۴-۰۵-۱۲۸۱-۸
ISBN 964-05-1281-8

قیمت در تمام کشور ۸۰۰۰ ریال

۱۳۸۴